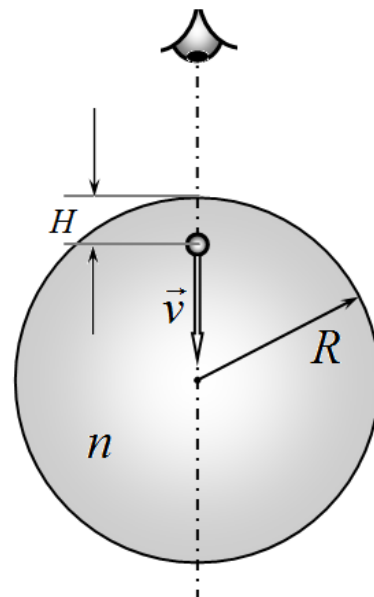


### Задача 11-2. Аквариум. РФО-2016

Имеется тонкостенный прозрачный сосуд шарообразной формы радиусом  $R$ , заполненный прозрачной жидкостью, показатель преломления которой  $n$ . В сосуде равномерно опускается сверху вниз маленький шарик со скоростью  $\vec{v}$  относительно сосуда. В следствие преломления света, кажущаяся глубина шарика  $h$  (положение его изображения) будет отличаться от его истинной глубины  $H$ .



#### Часть 1. Вид сверху.

За движением шарика наблюдают сверху из точки расположенной на большом расстоянии от сосуда.

1.1 При каком положении шарика его кажущаяся глубина  $h$  будет совпадать с истинной глубиной  $H$ , не зависимо от показателя преломления жидкости. Ответ обоснуйте.

1.2 Найдите зависимость кажущейся глубины  $h$  шарика от его действительной глубины  $H$  при  $H < R$ ;

1.3 Найдите зависимость кажущейся глубины  $h$  шарика от его действительной глубины  $H$  при  $H \geq R$ ;

1.4. Постройте график зависимости, кажущейся глубины шарика  $h$  от его истинной глубины  $H$ . Данный график постройте в относительных координатах  $y = \frac{h}{R}$  от  $x = \frac{H}{R}$ , при двух значениях  $n_1 = 1,5$  и  $n_2 = 2,5$ .

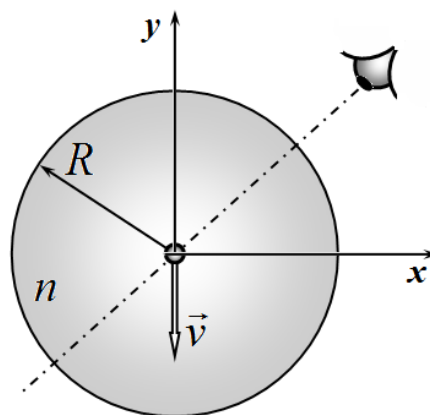
1.5. Найдите зависимость кажущейся скорости движения шарика от его действительной глубины  $H$

1.6. Постройте графики полученных в п.1.5 зависимостей при двух значениях  $n_1 = 1,5$  и  $n_2 = 2,5$  в безразмерных координатах  $\chi = \frac{u}{v}$  от  $x = \frac{H}{R}$ ;

#### Часть 2. Вид сбоку.

Глаз наблюдателя находится сбоку на прямой, проходящей через центр шара и направленной под углом  $45^\circ$  к вертикали. Показатель преломления жидкости равен  $n_1 = 1,5$ .

2.1 Постройте вектор видимой скорости движения шарика  $\vec{u}$  при наблюдении сбоку, в момент времени, когда шарик проходит центр шара. Найдите координаты этого вектора в системе отсчета, показанной на рисунке.



**Решение:**

**1.1** Если шарик находится в центре сосуда, то все лучи, выходящие от него, будут пересекать стенки сферического аквариума по нормали, следовательно, без изменения направления распространения. Поэтому при наблюдении с любой стороны при любом показателе преломления изображение шарика также будет находиться в центре шара.

**1.2** Ход лучей показан на рисунке 1. Видно, что изображение  $A$  предмета  $B$  находится на глубине  $h$ , меньшей, чем действительная глубина  $H$ .

Применим теорему синусов к  $\triangle OBC$ :

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{R-H}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Поскольку углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  малы, то

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin(\alpha + \gamma) \approx \alpha + \gamma \Rightarrow$$

$$\frac{R-H}{\alpha} = \frac{R}{\alpha + \gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{H\alpha}{R-H}.$$

Совершенно аналогично рассматривая  $\triangle OAC$ , получим:

$$\gamma = \frac{h\beta}{R-h}.$$

Приравняем правые части выражений, полученных для  $\gamma$ :

$$\frac{H\alpha}{R-H} = \frac{h\beta}{R-h} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R-H}{R-h}.$$

Используя закон преломления света, получим:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R-H}{R-h} \Rightarrow$$

$$h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}.$$

Введем безразмерный параметр  $x = \frac{H}{R}$ . В результате:

$$h = \frac{H}{n - (n-1)x}$$

или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n-1)x}.$$

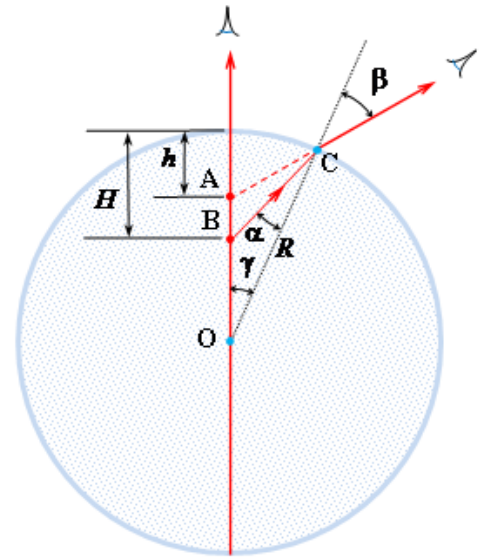


Рис. 1

**1.3** Ход лучей в этом случае показан на рисунке 2. Видно, что изображение предмета находится на глубине, большей, чем действительная глубина. Ход решения в этом случае аналогичен.

Применим теорему синусов к  $\Delta BOC$ :

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{H-R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

Поскольку углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  малы, то  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \gamma \approx \gamma \Rightarrow$

$$\frac{H-R}{\alpha} = \frac{R}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{R\alpha}{H-R}.$$

Применяя теорему синусов к  $\Delta AOC$ , получим:

$$\frac{AO}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \delta} \Rightarrow \frac{h-R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \delta}.$$

На рисунке 2 видно, что в  $\Delta AOC$

$$\delta = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (\beta - \alpha) = \gamma - \beta + \alpha.$$

В результате:  $\frac{h-R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(\gamma - \beta + \alpha)} \Rightarrow \gamma - \beta + \alpha = \frac{R\beta}{h-R}.$

Подставляя выражение для  $\gamma$  и используя закон преломления  $\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$ , получим:

$$\frac{R}{H-R} \alpha - \alpha n + \alpha = \frac{R}{h-R} \alpha n \Rightarrow h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$$

или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n-1)x},$$

что совпадает с формулой, полученной для случая, когда тело было выше центра шара.

**1.4** Графики полученных зависимостей показаны на рисунке 3. При  $n = 2,5$  эта график этой зависимости терпит разрыв и устремляется к  $y \rightarrow \pm\infty$ . Физический смысл этого явления можно понять: шарик переходит через фокус сферической поверхности.

**1.5.** Для вычисления видимой скорости движения шарика следует вычислить производную от видимой координаты  $u = \frac{dh}{dt}$ .

Т.к.  $h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$ , то

$$u = \frac{(nR - (n-1)H)R + HR(n-1)}{(nR - (n-1)H)^2} v \Rightarrow$$

$$u = \frac{nR^2}{(nR - (n-1)H)^2} \Rightarrow$$

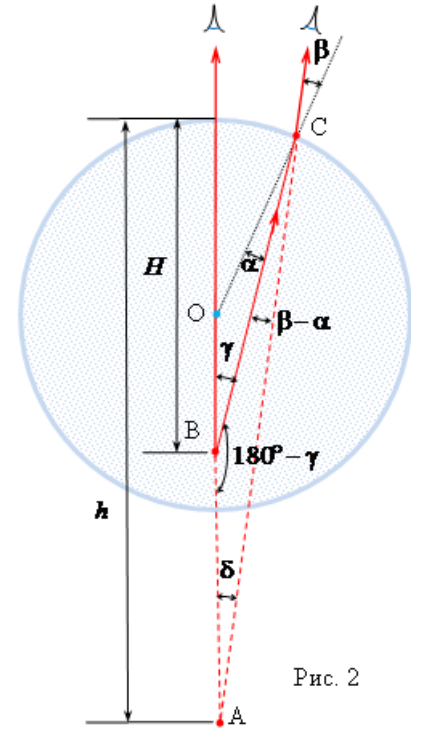


Рис. 2

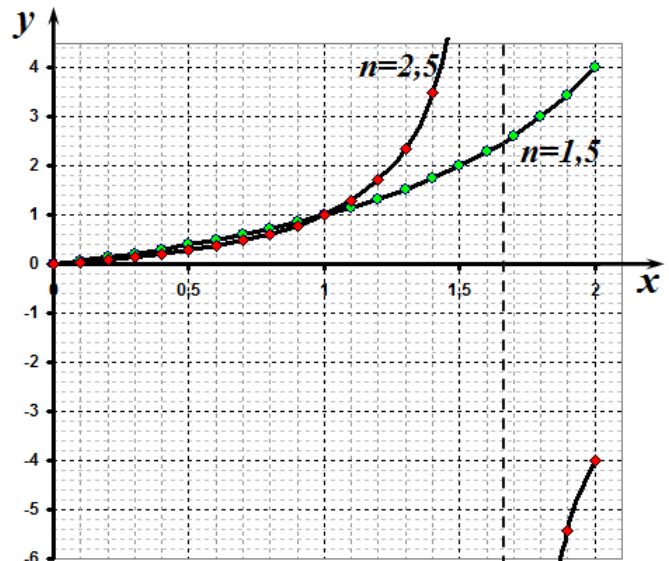


Рис. 3

В безразмерных координатах эта зависимость имеет вид

$$\chi = \frac{n}{(n - (n - 1)x)^2}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 4

**1.6** График этих зависимостей показан на рисунке 4. Эта функция также терпит разрыв в указанной точке. Но скорость движения изображения шарика все время остается положительной.

## Часть 2.

**2.1** В общем случае положение изображения зависит от точки наблюдения.

Поэтому в данной части задачи нельзя пользоваться результатами, полученными в первой части задачи. Для построения изображения надо построить, по крайней мере, два луча и найти их точку пересечения.

Направим ось  $X$  вдоль линии наблюдения. В этой системе шарик движется под углом  $45^\circ$  к осям координат. Рассмотрим положение шарика в момент времени непосредственно предшествующий его прохождению через центр, когда его координаты равны  $x = a$ ,  $y = a$ , причем величина  $a$  является малой. В качестве первого луча возьмем луч, попадающий на стенку в точке  $x = 0$ . Построение этого луча понятно из рисунка 5. Полагая все углы малыми находим угол, под которым выходит преломленный луч.

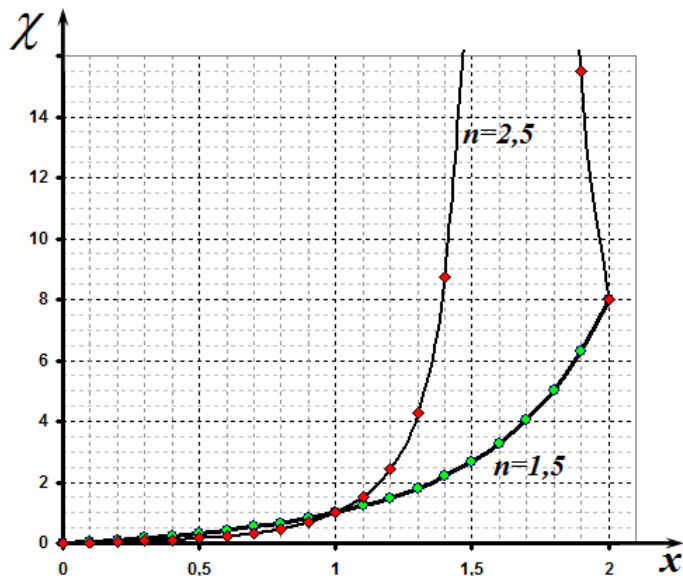


Рис. 4

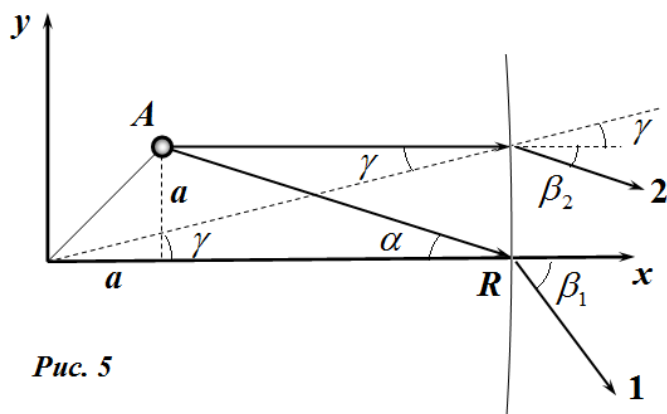


Рис. 5

$$\beta_1 = n\alpha = n \frac{a}{R - a}. \quad (1)$$

Уравнения этого луча имеет вид

$$y = -\frac{na}{R - a}(x - R) \quad (2)$$

Второй луч направим параллельно оси  $X$ . Для этого луча также не сложно найти уравнение: Из закона преломления и геометрических построений следует, что угол наклона преломленного луча равен

$$\beta_2 + \gamma = n\gamma \Rightarrow \beta_2 = (n - 1)\gamma \quad (3)$$

где  $\gamma = \frac{a}{R}$ . Тогда уравнение этого луча имеет вид

$$y = a - \frac{(n - 1)a}{R}(x - R). \quad (4)$$

Изображением шарика является точка пересечения этих лучей. Координаты этой точки являются результатом совместного решения уравнений (2) и (4). Аккуратное решение этой системы уравнений приводит к следующему результату.

$$x = R - R \frac{R - a}{R + (n - 1)a} \quad (5)$$

$$y = \frac{nRa}{R + (n - 1)a}$$

Далее необходимо упростить данные выражения, полагая  $a \ll R$ . В формуле для координаты  $y$  можно пренебречь  $a$  в знаменателе:

$$y \approx na \quad (6)$$

Для координаты  $x$  следует проделать следующие преобразования

$$x = R - R \frac{R - a}{R + (n - 1)a} = R \left( 1 - \frac{1 - \frac{a}{R}}{1 + (n - 1) \frac{a}{R}} \right) \approx R \left( 1 - \left( 1 - \frac{a}{R} - n - 1 \right) \frac{a}{R} \right) \approx na. \quad (7)$$

Таким образом, мы получили, что координаты изображения просто в  $n$  раз больше действительных координат шарика. Следовательно, все кинематические характеристики движения изображения шарика (в т.ч. и вектор скорости) так же будут в  $n = 1,5$  больше соответствующих характеристик движения самого шарика. Таким образом. Вектор скорости видимого движения совпадает по направлению с вектором  $\vec{V}$ , но его длина в полтора раза больше.