

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа
Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования

Р.С.Сидоренко

«___» декабря 2016 г.



Республиканская физическая олимпиада 2017 год. (III этап)

Теоретический тур

9 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!
3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.



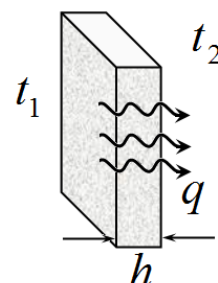
***Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может вам показаться, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.***

Задача 9-3. Обогрев дома.

Республика Беларусь тратит значительно количество энергии на обогрев помещений. Экономия ресурсов, затрачиваемых на отопление, является важной государственной проблемой. В данной задаче Вам необходимо рассмотреть некоторые возможности уменьшения расходов на поддержание комфортных температур в жилых помещениях.

При решении задачи вам понадобится закон теплопроводности (сформулированный французским физиком Ш. Фурье). В упрощенной форме он формулируется следующим образом. Пусть одна сторона плоскопараллельной пластины толщиной h поддерживается при постоянной температуре t_1 , а вторая при температуре t_2 . Тогда плотность потока теплоты q через пластину пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине пластины

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{h}, \quad (1)$$



Коэффициент пропорциональности зависит только от материала пластины и называется **теплопроводностью** материала.

Плотностью потока теплоты называется количество теплоты, которое перетекает через площадку единичной площади в единицу времени (чтобы избежать путаницы в данной задаче температуру будем обозначать t , а время τ)

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau} \quad (2)$$

Справочные данные:

	Плотность	Удельная теплоемкость	Теплопроводность
Воздух	$\rho_0 = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_0 = 1,0 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda_0 = 2,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Бетон	$\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_1 = 0,92 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Утеплитель (стекловата)			$\lambda_2 = 6,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Примечание. Плотность, теплоемкость и теплопроводность воздуха зависят от температуры и давления. Однако, в данной задаче этими зависимостями следует пренебречь и использовать приведенные в таблице средние значения.

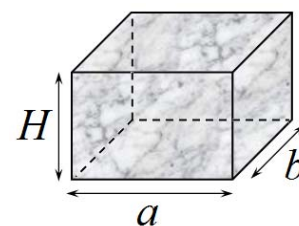
Часть 1. Бетонная коробка.

Основу дома является бетонная коробка, внутренние размеры которой $a \times b \times H = 6,0 \times 6,0 \times 2,5 \text{ м}$. Толщина стен, пола и потолка равна $h = 20 \text{ см}$.

1.1 Рассчитайте массу бетона, из которого изготовлена коробка.

1.2 Рассчитайте теплоемкость коробки C_1 .

1.3 Оцените массу воздуха внутри дома и его теплоемкость C_0 .



Теплоемкостью тела C (не путайте с удельной теплоемкостью вещества) называется количество теплоты, которое требуется, чтобы нагреть тело на 1° .

Влиянием окон и дверей на потери теплоты можно пренебречь.

Пол и потолок дома хорошо теплоизолированы (потолок поверх слоя бетона, а пол снизу слоя бетона), поэтому потери теплоты проходят только через стены дома.

Часть 2. Обогрев без утеплителя

В данной части задачи рассматриваются возможности обогрева рассмотренного в Части 1. Для обогрева дома используется печь, работающая на дизельном топливе. Коэффициент полезного действия печи примем равным 70% (т.е. 30% выделяемой теплоты улетает «в трубу»). Максимальная полезная мощность печи равна $P_0 = 10 \text{ кВт}$.

2.1 Рассчитайте стоимость ($s_0 \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}$) 1 Джоуля теплоты, идущего на нагревание дома.

Плотность дизельного топлива $\rho = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельная теплота его сгорания $q = 43 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$, цена 1 литра топлива 1,2 руб.

2.2 Пусть мощность теплоты идущей на обогрев комнаты равна P , температура наружного воздуха t_0 . Получите формулу для установившейся температуры воздуха внутри дома t_1 .

Считайте, что температура поверхности стен внутри дома равна t_1 , а снаружи - t_0 . Для передачи теплоты от стен к наружному воздуху температура стены должна быть немного выше, чем температура воздуха. Однако эта разность обычно мала и ею можно пренебречь.

2.3 Пусть средняя температура наружного воздуха равна $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Какова должна быть мощность теплоты P_1 , идущей на обогрев, что бы температура воздуха внутри дома была равна $t_1 = 20^\circ\text{C}$? Рассчитайте стоимость дизельного топлива, которое потребуется на обогрев дома в течение суток.

2.4 Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Печь разжигают.

Рассчитайте:

- количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате до температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$;
- количество теплоты, которое пойдет на нагревание стен, потолка и пола до достижения установившейся температуры;
- стоимость «разогрева» дома в рублях.

Оцените время разогрева дома до установившейся температуры. Если мощность печи равна максимальной полезной мощности печи $P_0 = 10 \text{ кВт}$.

Часть 3. Утепление

Пусть теплота перетекает через некоторый слой вещества. На основании закона Фурье можно записать, что плотность потока теплоты через слой выражается формулой

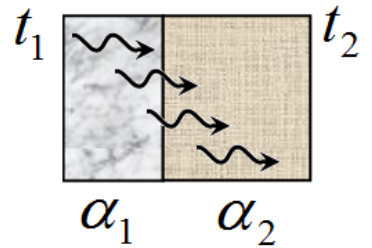
$$q = \alpha \Delta t, \quad (3)$$

где коэффициент α (назовем ее тепловой проводимостью) зависит от материала слоя и его толщины, Δt - разность температур на границах слоя.

3.1 Рассчитайте численное значение коэффициента α для бетонной стены рассматриваемого дома.

3.2 Путь теплота протекает через два параллельных слоя, тепловые проводимости которых равны α_1 и α_2 . Покажите, что плотность потока теплоты через составной слой может быть записана в виде

$$q = \alpha(t_1 - t_2) \quad (4)$$



Выразите значение коэффициента α для составного слоя, через значения коэффициентов α_1 и α_2 .

Для уменьшения расходов стены дома утепляют, покрывая их слоем утеплителя (стекловаты), толщиной $h_2 = 10\text{см}$.

3.3 Какова должна быть мощность теплоты P_2 , идущей на обогрев дома, чтобы поддерживать внутри постоянную температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$ при температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$.

3.4 Во сколько раз уменьшаться финансовые расходы на поддержание температуры в доме.

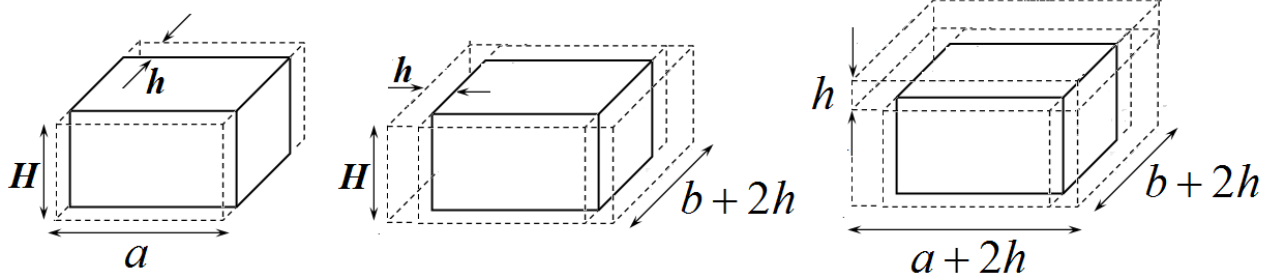
3.5 Оцените время и стоимость «разогрева» утепленного дома от $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ до установившейся температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$, если включить печь на максимальную полезную мощность $P_0 = 10\text{кВт}$.

3.6 Допустим, что житель города наезжает в свой загородный дом (рассматриваемый в данной задаче) только на выходные дни. Дайте совет – что экономически выгоднее, разогревать дом по приезду в субботу, или поддерживать его установившуюся температуру в течение будних дней?

Задача 9-3. Обогрев дома.

1.1 – 1.2

Рассчитаем объем бетона (с правильным учетом углов дома):



Две стены:

$$V_1 = 2aHh;$$

Еще две стены:

$$V_2 = 2(b + 2h)Hh;$$

Потолок и пол:

$$V_3 = 2(a + 2h)(b + 2h)h.$$

Подстановка численных значений и вычисления приводят к следующему результату (округление проведено с одной запасной цифрой)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 28,8 \text{ м}^3.$$

Масса бетона

$$m_1 = \rho_1 V = 6,3 \cdot 10^4 \text{ кг} \quad (1)$$

Его теплоемкость

$$C_1 = c_1 m_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (2)$$

2.4 -1.4 Масса воздуха и его теплоемкость рассчитывается по формулам

$$m_0 = abH\rho_0 = 108 \text{ кг} \quad (3)$$

$$C_0 = c_0 m_0 = 108 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (4)$$

2.4 При сгорании 1 литра дизельного топлива выделяется количество теплоты

$$Q_0 = \rho V q = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 43 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Из этого количества на обогрев дома пойдет

$$Q_1 = \eta Q_0 = 2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Стоимость этой теплоты равна 1,2 рубля, следовательно, стоимость одного джоуля теплоты равна

$$s_0 = \frac{1,2 \text{ руб}}{2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}} = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}. \quad (5)$$

Т.е. приблизительно 5 микрокопеек.

2.4 В установившемся режиме, количество теплоты, поступающей от нагревателя равно, количеству теплоты, уходящей через стены, поэтому

$$P = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0). \quad (5)$$

Где $S = 4aH$ - площадь стен.

Из этого соотношения следует

$$t_1 = t_0 + \frac{h}{4aH\lambda_1} P. \quad (5)$$

2.3 Используя формулу (4), найдем

$$P_0 = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0) = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 7,2 \text{ кВт}. \quad (6)$$

Стоимость требуемого в течение суток топлива равна

$$S = s_0 P_0 \tau = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} \cdot 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \text{ руб}. \quad (7)$$

2.4 Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Печь разжигают.

Количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате, равно

$$Q_0 = C_0 (t_1 - t_0) = 108 \cdot 20 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \quad (8)$$

Для расчета количества теплоты, которое пойдет на нагревание стен до достижения установившейся температуры, следует учесть, что температура внутри стен линейно изменяется от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Поэтому на разогрев стен потребуется количество теплоты равное

$$Q_{cm} = 4aHh\rho_1 c_1 \frac{t_1}{2} = 4 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 10 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Дж}.$$

Потолок и пол должны полностью нагреться до температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Требуемое на это количество теплоты равно

$$Q_{n-n} = 2a^2 h \rho_1 c_1 t_1 = 2 \cdot 6,0^2 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 20 = 5,8 \cdot 10^8 \text{ Дж}$$

Полное количество теплоты, которое потребуется на разогрев всего дома

$$Q_1 = 8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж}. \quad (9)$$

Стоимость этой теплоты

$$S = c_0 Q_1 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} \cdot 8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 38 \text{ руб}. \quad (10)$$

Время разогрева можно оценить по формуле

$$\tau = \frac{Q_1}{P_0} = \frac{8,2 \cdot 10^8 \text{ Дж}}{10 \cdot 10^3 \text{ Вт}} = 8,2 \cdot 10^4 \text{ с} = 23 \text{ часа}. \quad (11)$$

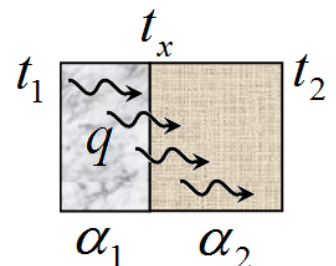
3.1 Сравнивая формулы (1) и (3), находим, что $\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}}{0,20 \text{ м}} = 6,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (12)$$

3.2 Обозначим температуру стыка слоев t_x . Тогда плотности потоков теплоты через разные слои описываются формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 (t_1 - t_x) \\ q_2 &= \alpha_2 (t_x - t_2) \end{aligned} \quad (13)$$

В установившемся режиме $q_1 = q_2$. Из этого условия находим температуру места соединения слоев



$$\alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_2(t_x - t_2) \Rightarrow t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (14)$$

Плотность потока теплоты можно выразить через температуры границ составного слоя, как

$$q = q_2 = q_1 = \alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_1 \left(t_1 - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (t_1 - t_2). \quad (15)$$

Тем самым доказана формула (4) условия задачи. Видно, что проводимость составного слоя равна¹

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (16)$$

3.3 -3.4 Рассчитаем тепловую проводимость слоя изоляции

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{h_2} = \frac{6,0 \cdot 10^{-2} \frac{Bm}{m \cdot K}}{0,10m} = 6,0 \cdot 10^{-1} \frac{Bm}{m^2 \cdot K}. \quad (17)$$

Тепловая проводимость стены с изоляцией в соответствии с формулой (16) оказывается равной

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 0,60}{6,6} \frac{Bm}{m^2 \cdot K} = 0,55 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}. \quad (18)$$

В этом случае условие стационарности температуры будет иметь вид

$$P = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0). \quad (19)$$

Подставляя численные значения, находим требуемую тепловую мощность

$$P_1 = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0) = 2 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot 20 = 660 Bm, \quad (20)$$

Что в $\frac{P_0}{P_1} = \frac{7200}{660} = 11$ раз меньше, чем мощность обогрева дома без утеплителя.

3.5 По формуле (14) рассчитаем температуру внешней стороны бетонной стенки

$$t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 20}{6,6} = 18^\circ. \quad (21)$$

Фактически всю бетонную коробку необходимо нагреть на 20° . Поэтому количество теплоты, требуемое на это равно

Следовательно, на нагревание стен требуется количество теплоты, равное

$$Q_2 = C_1 t_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{Дж}{К} \cdot 20K = 11,6 \cdot 10^8 Дж, \quad (22)$$

Стоимость этой теплоты $S_2 = c_0 Q_2 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{руб}{Дж} \cdot 1 \cdot 10^8 Дж = 53 руб$, что больше, чем при

нагреве стен без утеплителя.

Время разогрева утепленного дома

$$\tau_2 \approx \frac{Q_2}{P_0} = 1,2 \cdot 10^5 c = 32 часа.$$

¹ Не сложно доказать, что в общем случае произвольного числа слоев

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$$

3.6 На поддержание комнатной температуры утепленного дома в течение суток потребуется количество теплоты $Q = P_1 \tau = 660 \cdot 24 \cdot 3600 = 5,7 \cdot 10^7$ Дж, стоимость которой $S = 2,6$ руб. Следовательно на поддержание постоянной температуры в течение 7 дней надо затратить 18 руб, что значительно меньше чем стоимость разогрева. Следовательно, поддерживать постоянную температуру выгоднее, чем каждую субботу разогревать дом, тем более, что в этом случае не придется сидеть в холодном доме всю субботу!