

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования

Р.С.Сидоренко

«___» декабря 2016 г.



Республиканская физическая олимпиада 2017 год. (III этап)

Теоретический тур

11 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!
3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.



Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!

Может вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Задача 11-1 . Проводящие и диэлектрические сферы

1. Три концентрические сферы имеют радиусы $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 4R$ и заряды $q_1 = q$, $q_2 = 4q$, и $q_3 = -2q$ соответственно.
 - 1.1. Определите потенциалы и напряжённости на внешних поверхностях данных сфер и в точке посередине между второй и третьей сферой считая от центра сфер.
 - 1.2. Вторую и третью сферу соединяют проводником. Определите установившиеся заряды сфер q'_1 , q'_2 , q'_3 .
 - 1.3. Вторую и третью сферу заземляют (соединительный проводник остаётся). Какой заряд пройдёт по заземляющему проводнику?
2. Две тонкие проводящие концентрические сферы радиусами $R_1 = R$ и $R_2 = 3R$ имеют заряды $q_1 = q$ и $q_2 = 3q$ соответственно. Пространство между сферами заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ .
 - 2.1. Определите величину связанных зарядов q_{c1} и q_{c2} на внутренней и внешней поверхностях диэлектрического слоя.
 - 2.2. Определите потенциал электростатического поля на расстоянии R , $2R$ и $3R$ от центра сфер.
 - 2.3. Внутреннюю сферу заземлили. Определите величину связанных зарядов q'_{c1} и q'_{c2} на внутренней и внешней поверхностях диэлектрического слоя в данном случае.

Примечание. В уравнениях используйте обозначение $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. В п.2.3. не задумывайтесь над технической стороной вопроса: «Как заземлить внутреннюю сферу?». Просто примите как факт, что внутренняя сфера заземлена, а внешняя – нет. Заряд внешней сферы не изменяется и равен $3q$

Задача 11-1.

Решение

1.1. Потенциал на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции потенциалов. Потенциал каждой из сфер будет определяться не только зарядом данной сферы, но и зарядами двух других сфер.

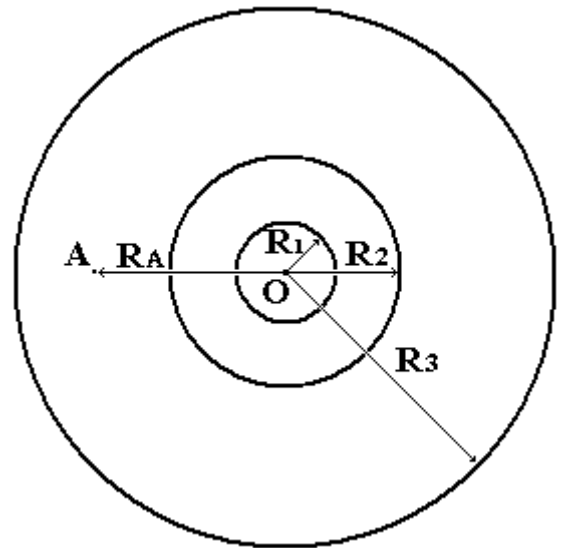


Рисунок 1.

Потенциал на внешней поверхности первой сферы:

$$\varphi_1 = k \frac{q}{R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{10}{4} k \frac{q}{R} \quad (1)$$

Потенциал на внешней поверхности второй сферы:

$$\varphi_2 = k \frac{q}{2R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = 2k \frac{q}{R} \quad (2)$$

Потенциал на внешней поверхности третьей сферы:

$$\varphi_3 = k \frac{q}{4R} + k \frac{4q}{4R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{3}{4} k \frac{q}{R} \quad (3)$$

Потенциал в точке А:

$$\varphi_A = k \frac{q}{3R} + k \frac{4q}{3R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{7}{6} k \frac{q}{R} \quad (4)$$

Напряжённости электрических полей на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции напряжённостей. Векторы напряжённостей электрических полей, создаваемых концентрическими сферами, будут направлены радиально к поверхностям сфер. Поэтому суммирование напряжённостей полей производится алгебраически. Также учитываем, что напряжённость электрического поля внутри сферы равна нулю.

Напряжённость на внешней поверхности первой сферы:

$$E_1 = k \frac{q}{R^2} \quad (5)$$

Напряжённость на внешней поверхности второй сферы:

$$E_2 = k \frac{q}{4R^2} + k \frac{4q}{4R^2} = \frac{5}{4} k \frac{q}{R^2} \quad (6)$$

Напряжённость на внешней поверхности третьей сферы:

$$E_3 = k \frac{q}{16R^2} + k \frac{4q}{16R^2} - k \frac{2q}{16R^2} = \frac{3}{16} k \frac{q}{R^2} \quad (7)$$

Напряжённость в точке А:

$$E_A = k \frac{q}{9R^2} + k \frac{4q}{9R^2} = \frac{5}{9} k \frac{q}{R^2} \quad (8)$$

1.2.

После соединения второй и третьей сфер проводником между ними происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными. Суммарный заряд этих двух сфер сохраняется.

$$\varphi'_2 = \varphi'_3 \quad (9)$$

$$q'_2 + q'_3 = q_2 + q_3 \quad (10)$$

$$q'_2 + q'_3 = 2q \quad (11)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q'_1 = q_1 = q \quad (12)$$

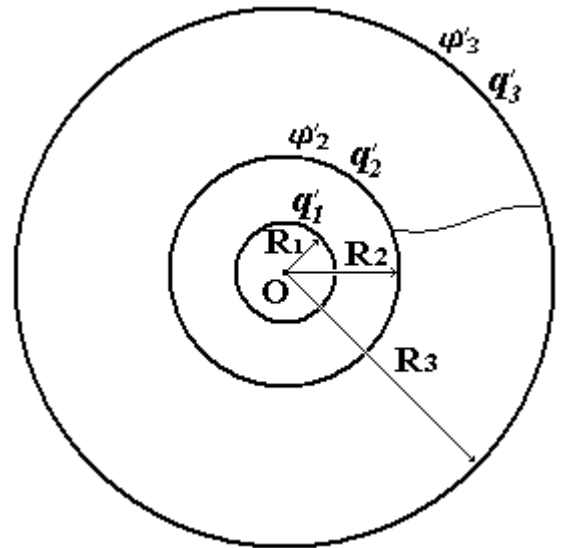


Рисунок 2.

Уравнение (9) запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q'_2}{2R} + k \frac{q'_3}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q'_2}{4R} + k \frac{q'_3}{4R} \quad (13)$$

Из (13) получим:

$$q'_2 = -q \quad (14)$$

Из (11) получим:

$$q'_3 = 3q \quad (15)$$

1.3.

После заземления второй и третьей сфер между ними и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными нулю.

$$\varphi''_2 = \varphi''_3 = 0 \quad (16)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q''_1 = q_1 = q \quad (17)$$

По заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = q'_2 + q'_3 - q''_2 - q''_3 \quad (18)$$

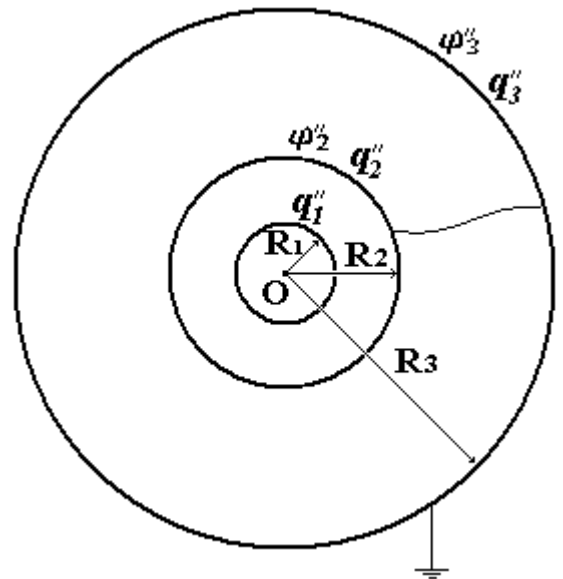


Рисунок 3.

Равенство потенциалов $\varphi''_2 = \varphi''_3$ запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q''_2}{2R} + k \frac{q''_3}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q''_2}{4R} + k \frac{q''_3}{4R} \quad (19)$$

Из (19) получим:

$$q''_2 = -q \quad (20)$$

Учитывая, что $\varphi''_3 = 0$ получим:

$$q''_3 = 0 \quad (21)$$

Следовательно, по заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = 3q \quad (22)$$

2.1.

Диэлектрический слой «заменяем» двумя сферами радиусами R и $3R$, и зарядами q_{c1} и q_{c2} . На рисунке 4 данные сферы обозначены пунктиром. Напряжённость электрического поля на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы можно определить как

$$E_D = k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} \quad (23),$$

или как

$$E_D = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (24).$$

Приравняв правые части (23) и (24) определим величину связанных зарядов,

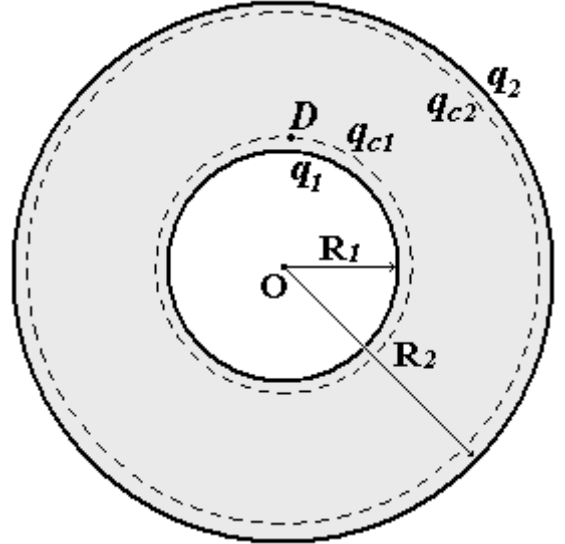


Рисунок 4.

образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы q_{c1} .

$$k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (25)$$

$$q_{c1} = q \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (26)$$

Величину связанных зарядов, образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внешней сферы q_{c2} , определим используя закон сохранения электрического заряда. Диэлектрический слой, согласно условия задачи, электрически нейтрален. Поэтому

$$q_{c1} + q_{c2} = 0 \quad (27)$$

Подставляя в (27) значение q_{c1} , получим:

$$q_{c2} = q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (28)$$

2.2.

Потенциалы определяем по принципу суперпозиции потенциалов.

$$\varphi_R = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (29)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q_1}{2R} + k \frac{q_{c1}}{2R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (30)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q_1}{3R} + k \frac{q_{c1}}{3R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (31)$$

Подставляя значения зарядов q_1, q_2, q_{c1}, q_{c2} , получим:

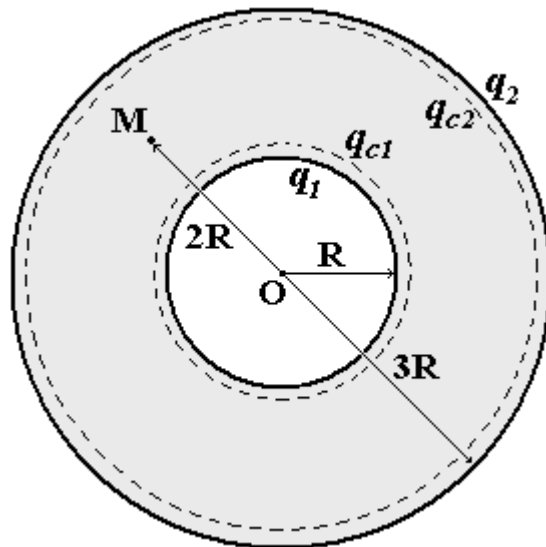


Рисунок 5.

$$\varphi_R = k \frac{q}{R} + k \frac{q(1-\epsilon)}{R} + k \frac{q(\epsilon-1)}{3R} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q(4\epsilon+2)}{3\epsilon} \quad (32)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q}{2R} + k \frac{q(1-\epsilon)}{2R} + k \frac{q(\epsilon-1)}{3R} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q(8\epsilon+1)}{6\epsilon} \quad (33)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q}{3R} + k \frac{q(1-\epsilon)}{3R} + k \frac{q(\epsilon-1)}{3R} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q4}{R3} \quad (34)$$

2.3.

После заземления внутренней сферы между ней и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциал этой сферы становится равным нулю.

$$\varphi_1''' = 0 \quad (35)$$

Потенциал φ_1''' запишем, используя принцип суперпозиции потенциалов:

$$k \frac{q_1'''}{R} + k \frac{q'_{c1}}{R} + k \frac{q'_{c2}}{3R} + k \frac{3q}{3R} = 0 \quad (36)$$

Для напряжённости электрического поля в точке D получим уравнение

$$k \frac{q_1'''}{R^2} + k \frac{q'_{c1}}{R^2} = k \frac{q_1'''}{\epsilon R^2} \quad (37)$$

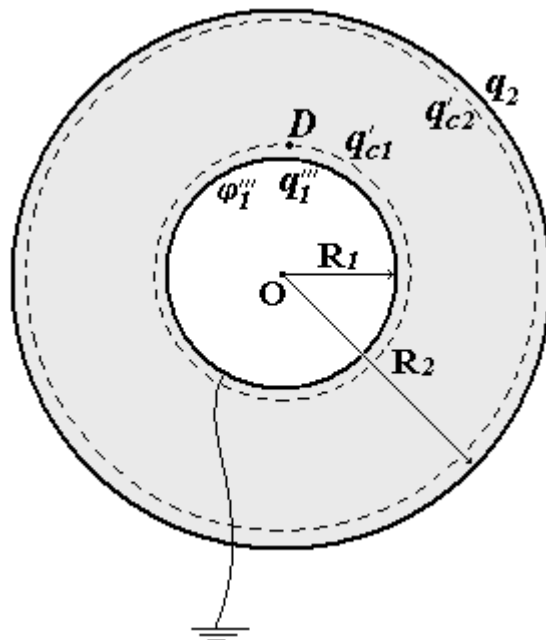


Рисунок 6.

Так же примем во внимание, что диэлектрический слой остаётся электрически нейтральным, а следовательно

$$q'_{c1} + q'_{c2} = 0 \quad (38).$$

Решив систему уравнений (36), (37) и (38), получим:

$$q_1''' = -q \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \quad (39)$$

$$q'_{c1} = q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (40)$$

$$q'_{c2} = -q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (41)$$