УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования
____________________Р.С.Сидоренко
«___» декабря 2016 г.

Республиканская физическая олимпиада 2017 год.
(III этап)

Теоретический тур

10 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!

3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.

4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач! Может вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Задача 10 - 3. «Мягкая» пружина

1. Десять пружин $(n = 10)$ длиной $l_1 = 5{,}00\text{см}$, массой $m_1 = 10{,}0\text{г}$ каждая и с коэффициентом жёсткости $k_1 = 100\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$ каждая, спаяны последовательно в цепочку. Растяжением каждой из пружин под действием собственного веса можно пренебречь.$\left(g = 10{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$

1.1. Определите длину l'такой цепочки, если цепочку подвесить вертикально, закрепив за один из её концов.

1.2. Сколько таких пружин нужно последовательно спаять в цепочку, чтобы длина цепочки под действием собственного веса увеличилась в два раза?

2. Пружина, которая может растягиваться под действием собственного веса, имеет массу m, длину l , коэффициент жёсткости k.

2.1. Определите деформацию пружины Δx, если её подвесить вертикально за один из концов.

2.2. При каком коэффициенте жёсткости пружины k её деформация под действием собственного веса Δx будет равно её длине l в недеформированном состоянии?

3. Пружина, которая может растягиваться под действием собственного веса, массой m, длиной l, и коэффициентом жёсткости k, лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между пружиной и поверхностью μ. К одному из краёв пружины прикладывают силу F.

3.1. Определите установившуюся деформацию пружины Δx, при её равномерном движении.

3.2. Определите деформацию пружины Δx, если $F = 2\mu mg$.

3.3. При каком значении силы Fдеформацию пружины $\Delta x = l$?

Задача 10-3.

Решение

1.1.

Длина всей цепочки, подвешенной вертикально

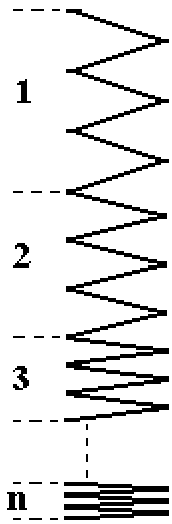

Рисунок 1.

$$l' = nl_1 + \Delta x \quad (1).$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_{n-1} (2),$$

где, Δx - удлинение всей цепочки.

$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{n-1}$ - удлинения первого, второго … (n-1)-го звеньев, считая сверху.

Верхнее первое звено будет деформироваться под действием веса нижних $(n-1)$ звеньев. Условие равновесия для них имеет вид:

$$k_1 \Delta x_1 = (n-1) m_1 g \quad (3).$$

Условие равновесия для нижних $(n-2)$ звеньев –

$$k_1 \Delta x_2 = (n-2) m_1 g \quad (4),$$

для $(n-i)$звеньев –

$$k_1 \Delta x_i = (n-i) m_1 g \quad (5),$$

для нижнего n-го звена –

$$k_1 \Delta x_{n-1} = m_1 g \quad (6).$$

Нижнее n-ое звено не деформируется.

Подставляя уравнения (3), (4), (5), (6), в (2) получим:

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \cdots + n - 1) (7).$$

$(1 + 2 + \cdots + n - 1)$– сумма $(n-1)$ первых членов арифметической прогрессии

$$(1 + 2 + \cdots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} (8).$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g n (n-1)}{2 k_1} (9).$$

$$\Delta x = \frac{0{,}0100\text{кг} \cdot 10{,}0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}} = 0{,}0450\text{м} = 4{,}50\text{см}.$$

$$\boldsymbol{l'} = 10 \cdot 5{,}00\text{см} + 4{,}50\text{см} = \mathbf{54{,}5}\textbf{см.}$$

1.2.Согласно условию

$$\Delta x = n l_1 \quad (10).$$

Подставляя (10) в (9) получим:

$$n l_1 = \frac{m_1 g n (n-1)}{2 k_1} (11).$$

Откуда

$$\boldsymbol{n} = \frac{2k_1 l_1}{m_1 g} + 1 = \frac{2 \cdot 100\,\frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 0{,}0500\text{м}}{0{,}0100\text{кг} \cdot 10{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} + 1 = \mathbf{101}\ (12).$$

2.1.

Выберем снизу пружины участок длиной x растяжением под действием собственного веса, которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\frac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \quad (13).$$

Деформацию первого сверху участка длиной x можно найти из условия равновесия оставшейся нижней части пружины (рис.3).

$$(m - m_1)g = k_1 \Delta x_1 (14).$$

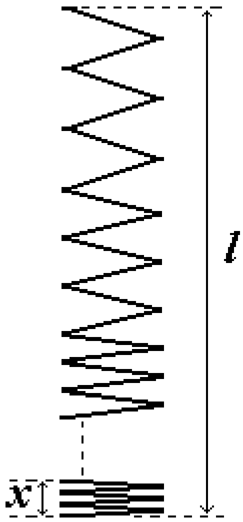

Рисунок 2.

$m_1 = \frac{x}{l} m$ (15) - масса участка пружины длиной x.

Учитывая (13) и (15), уравнение (14) примет вид:

$$\left(m - \frac{x}{l} m\right) g = nk\Delta x_1 (16).$$

Учитывая, что $\frac{l}{x} = n$ получим:

$$\left(m - \frac{1}{n} m\right) g = nk\Delta x_1 (17).$$

Откуда

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)mg}{n^2 k} (18).$$

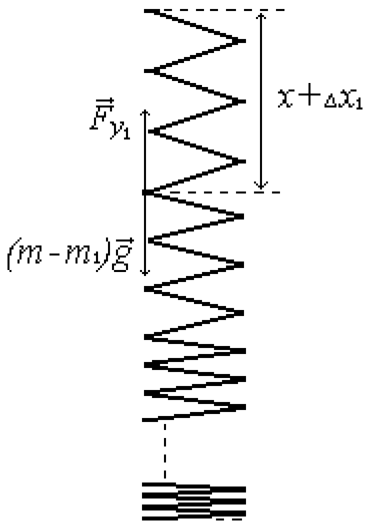

Рисунок 3.

Деформация второго сверху участка находится аналогично:

$$(m - 2m_1)g = k_1 \Delta x_2 (19),$$

$$\left(m - \frac{2x}{l} m\right) g = nk\Delta x_2 (20),$$

$$\left(m - \frac{2}{n} m\right) g = nk\Delta x_2 (21),$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)mg}{n^2 k} (22).$$

Для i-го участка

$$\Delta x_i = \frac{(n-i)mg}{n^2k}(23).$$

Учитывая, что

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_{n-1}(2),$$

получим

$$\Delta x = \frac{mg}{n^2k}(1+2+\cdots+n-1) = \frac{mg(n-1)}{2nk}(24).$$

При$n \to \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{2k}}(\boldsymbol{25}).$$

2.2. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$$l = \frac{mg}{2k}(26),$$

Откуда

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{2l}}(\boldsymbol{27}).$$

3.1. При равномерном движении пружины по горизонтальной поверхности внешняя сила F равна силе трения действующей на пружину со стороны поверхности

$$F = F_{\text{тр}} = \mu mg(28).$$

Выберем возле свободного конца пружины участок длиной x, деформацией которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\frac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \qquad (13).$$

Для -ой части пружины длиной x, находящейся слева, справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-1} = \mu \frac{x}{l} mg(29).$$

Для -ой и $(n-1)$-ой части пружины справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-2} = \mu \frac{2x}{l} mg(30).$$

Для i частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_{n-i} = \mu \frac{ix}{l} mg(31).$$

Для $(n-2)$ частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_2 = \mu\frac{(n-2)x}{l}mg(32).$$

Для $(n-1)$ частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_1 = \mu\frac{(n-1)x}{l}mg(33).$$

Для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2}(34),$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2}(35),$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{i\mu mg}{kn^2}(36),$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)\mu mg}{kn^2}(38),$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)\mu mg}{kn^2}(39).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{\mu mg(n-1)}{2nk}(40).$$

При$n \to \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{\mu mg}{2k}(41)}.$$

3.2. Рассуждая аналогично п.3.1., из второго закона Ньютона для -ой части пружины, n-ой и $(n-1)$-ой части, i частей пружины, находящихся слеваи.т.д. для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2}(42),$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2}(43),$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{im(\mu g + a)}{kn^2}(44),$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)m(\mu g + a)}{kn^2} (45),$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)m(\mu g + a)}{kn^2} (46).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)(n-1)}{2nk} (47).$$

При$n \to \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} (48)}.$$

3.3. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$$l = \frac{m(\mu g + a)}{2k} (49),$$

Откуда

$$a = \frac{2kl - \mu mg}{m} (50).$$

Из второго закона Ньютона, записанного для всей пружины, получим:

$$F = ma + \mu mg \qquad (51).$$

Подставляя (50) в (51), получим:

$$\boldsymbol{F = 2kl \qquad (52)}.$$