УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета заключительного этапа
Республиканской олимпиады Заместитель Министра образования
____________________Р.С.Сидоренко
«___» декабря 2016 г.

Республиканская физическая олимпиада 2017 год.
(III этап)

Теоретический тур

10 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!

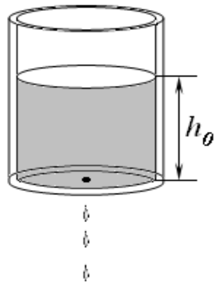
3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.

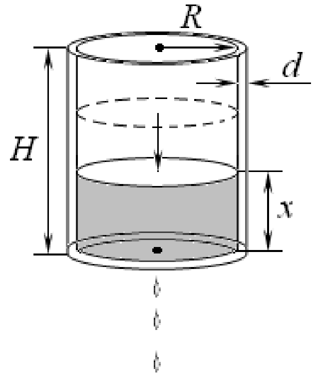
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Задача 10 - 2. Утечка … центра масс



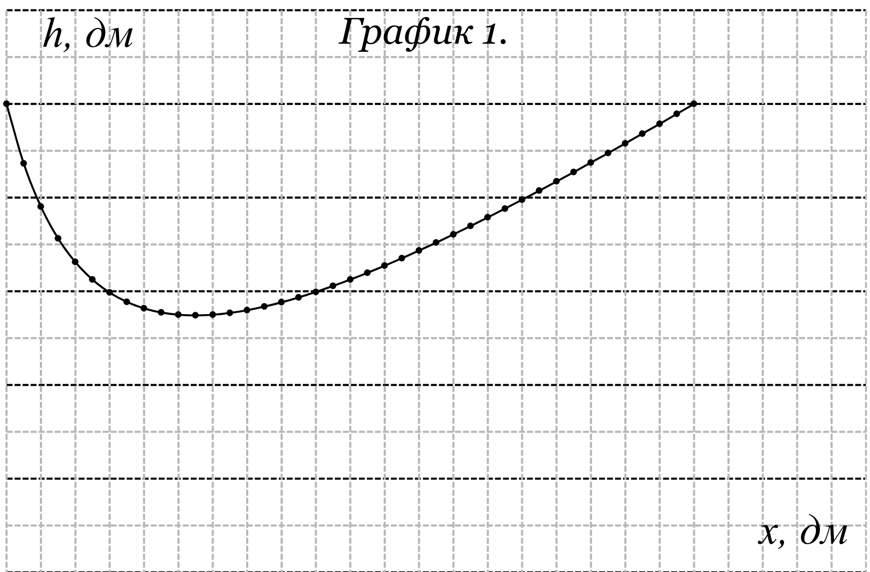


В вертикальный тонкостенный цилиндрический сосуд радиуса $R = 5{,}0$ см до некоторого уровня h_0 налита вода ($\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3). Из-за небольшой дырочки в центре сосуда вода начала вытекать из него, и через некоторое время сосуд оказался пуст. В процессе вытекания оказалось, что зависимость $h(x)$ высоты центра масс сосуда с водой от уровня (высоты) x воды в сосуде имеет вид, представленный на *Графике 1*. Толщина d ($d \ll R$) стенок и дна сосуда одинакова, плотность материала сосуда $\rho_1 = 3{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Часть 1. «Сложный» график

1.1 Используя *График 1*, найдите величину h_0 начального уровня воды в сосуде, а также высоту h_1, на которой находится центр масс пустого сосуда.

Зависимость h(x) высоты центра масс от высоты x воды



1.2 Получите вид функциональной зависимости $h(x)$ для рассматриваемого случая. Используя полученную зависимость и *График 1*, найдите массу m_1 сосуда без воды.

1.3 Найдите минимум функциональной зависимости $h(x)$, полученной в предыдущем пункте, и рассчитайте уровень x_1 жидкости в сосуде, при котором он достигается.

1.4 Используя значение x_1, повторно найдите массу m_1 сосуда без воды. Сравните полученные результаты для m_1 (в п.п. 1.2 и 1.4) между собой и сделайте выводы.

Часть 2. «Простой» сосуд

2.1 Используя ранее полученные данные, найдите и вычислите высоту H стенок сосуда.

2.2 Используя ранее полученные данные, найдите и вычислите толщину d стенок сосуда.

Часть 3. Наливаем обратно…

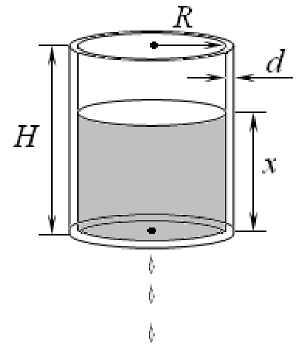
3.1 Взяли другой сосуд такой же массы m_1 и высоты h_1 центра масс с высокими стенками. Начали наливать в него воду так, что уровень x жидкости в нём медленно увеличивается со временем. Проанализируйте функцию $h(x)$ при больших x ($x \to \infty$). Достройте *График 1* на выданном *«Бланке построений»* для «больших» x в интервале $2{,}0$ дм $\le x \le 5{,}0$ дм.

Подсказка: координата X_c *центра масс системы материальных точек*
m_1 , m_2 , … , m_n , *находящихся на оси* Ox *и имеющих координаты* x_1 , x_2 , … , x_n, *соответственно, находится по формуле* $X_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

Задача 10-2.

Решение:

Часть 1. «Сложный» график



1.1 Удобно решать задачу в «обратном» порядке, рассматривая медленный подъём жидкости в сосуде от нуля до некоторого уровня x. При таком подходе сразу понятно, что начальная точка ($x = 0$) *Графика 1* – это и есть искомая высота h_1 центра масс пустого сосуда, поскольку воды в сосуде ещё пока нет

$$h_1 = 10 \text{ см} = 1{,}0 \text{ дм} . \qquad (1)$$

Далее заметим, что при максимальной высоте уровня $x = 20$ см воды в сосуде центр масс системы вновь находится на высоте h_1 от дна. Это вполне возможно, поскольку центр масс воды лежит на половине её высоты. Следовательно, искомая начальная высота

$$h_0 = 2h_1 = 20 \text{ см} = 2{,}0 \text{ дм} . \qquad (2)$$

1.2 Если уровень воды в сосуде находится на высоте x от дна, то масса воды, находящейся в сосуде, равна

$$m_2 = \rho V = \rho S x = \rho \pi R^2 x, \qquad (3)$$

а её центр масс, соответственно, находится на высоте $x/2$ от дна.

Если центр масс сосуда (без воды) массой m_1 находится на известной высоте h_1 от дна, то, согласно подсказке, в данный момент времени центр масс системы будет находиться между центрами масс воды и сосуда на высоте

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 (x/2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x (x/2)}{m_1 + \rho \pi R^2 x} = \frac{2 m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{2(m_1 + \rho \pi R^2 x)} . \qquad (4)$$

Выберем несколько «удобных» точек на *Графике 1*, когда функция «на глаз» проходит через узлы координатной сетки, минимум и т.д. Это, например, точки с координатами $(0{,}3; 0{,}6)$, $(0{,}55; 0{,}55)$, $(0{,}9; 0{,}6)$, $(1{,}5; 0{,}8)$ и т.д.

Из (4) выразим искомую массу m_1 пустого сосуда через координаты (x ; h) выбранной точки на *Графике 1*

$$m_1 = \rho \pi R^2 \frac{2h - x}{2(h_1 - h)} x . \qquad (5)$$

Используя (5), несложно вычислить массу m_1 сосуда без воды для каждой из выбранных нами на *Графике 1* точек. Результаты вычислений (до трёх значащих цифр, с учётом запасной цифры) занесём в таблицу

Точка	$\boldsymbol{m_1}$, кг
$(0{,}3; 0{,}6)$	0,265
$(0{,}55; 0{,}55)$	0,264
$(0{,}9; 0{,}6)$	0,265
$(1{,}5; 0{,}8)$	0,294

Как следует из таблицы, последняя точка значительно «вываливается» из численного диапазона первых трёх точек. Такие точки называются «промахами» и могут быть опущены при дальнейших расчётах. Если уж совсем внимательно присмотреться, то можно заметить, что эта «проблемная» точка $(1{,}5; 0{,}8)$ действительно лежит несколько ниже узла координатной сетки.

Усредняя первые три результата, и округляя вычисление до двух значащих цифр (как в условии), получаем окончательный ответ

$$m_1 = 0{,}2647 \text{ кг} \approx 0,26 \text{ кг} \tag{6}$$

Для удобства анализа полученной функции и вычислений m_1 введём безразмерные переменные для высоты центра масс системы $h^* = \frac{h}{h_1}$ и высоты жидкости в сосуде $x^* = \frac{x}{h_1}$ (т.е. будем измерять их в величинах «h_1»). Тогда зависимость (4) можно переписать в виде

$$h^*(x^*) = \frac{2+A\cdot(x^*)^2}{2(1+A\cdot x^*)} = \frac{1+A\cdot(x^*)^2/2}{1+A\cdot x^*}\,, \tag{7}$$

где остался единственный безразмерный параметр зависимости

$$A = \frac{\rho S h_1}{m_1} = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1}. \tag{8}$$

По данным таблицы в нашем случае значение параметра

$$A = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1} = 3{,}02\ . \tag{9}$$

Интересно, что если подставить в (4) значения $x = 0$ и $h(x) = h_1$, то мы придём к значениям (1) и (2).

1.3 Для нахождения минимума функции (4) (или (7)) заметим, что при повышении уровня воды в сосуде на начальном этапе ($x < h(x)$) каждый следующий небольшой слой воды массой Δm_i (Рис. 1, а) немного понижает положение центра масс системы, поскольку он находится ниже его.

Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень жидкости x не достигнет высоты $x = h(x)$ центра масс системы (Рис. 1, б). Далее ($x > h(x)$) уже каждый следующий слой воды будет приподнимать положение центра масс системы (Рис. 1,в).

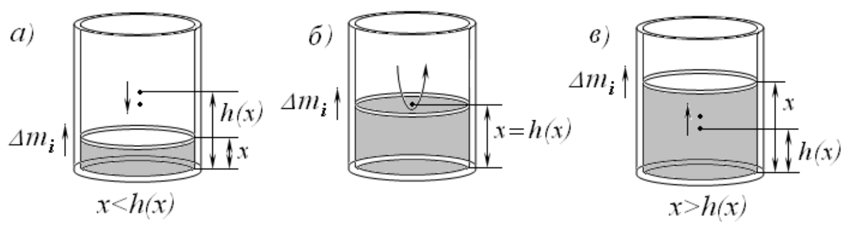
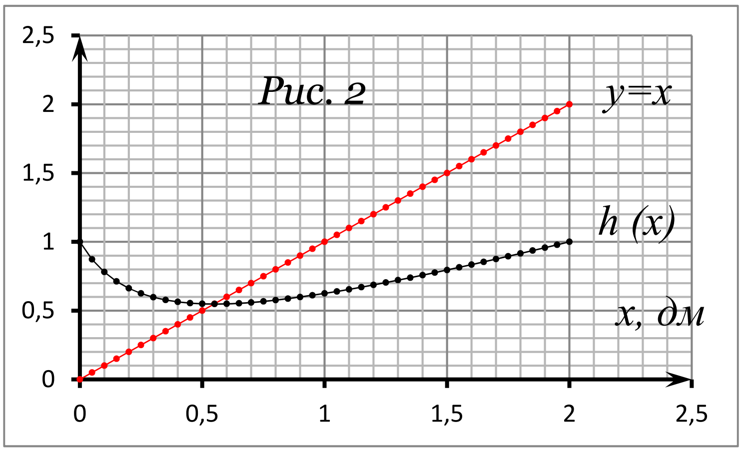


Рис. 1

Следовательно, при прохождении минимума функции $h(x)$ на *Графике 1* уровень воды x_1 должен совпадать с центром масс системы (ордината графика равна его абсциссе).

Для подтверждения справедливости этого вывода удобно построить (от школьников не требуется!) на одной координатной сетке (Рис. 2) графики зависимостей уровня $y = x$ воды в сосуде и высоты центра масс системы $h(x)$ от дна сосуда. Как следует из построения, график зависимости $y = x$ действительно пересекает график зависимости $h(x)$ «снизу вверх» в точке минимума.



Согласно (4) при этом можем записать

$$h(x) = x_1 = \frac{2m_1h_1+\rho\pi R^2 x_1^2}{2(m_1+\rho\pi R^2 x_1)}\,, \tag{10}$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно x_1

$$\rho\pi R^2 x_1^2 + 2m_1x_1 - 2m_1h_1 = 0\ . \tag{11}$$

Отбрасывая отрицательный корень, как не имеющий физического смысла, получаем искомое значение

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2+2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2}. \qquad (12)$$

Подчеркнём, что для нахождения минимума функции (4) (или (7)) можно также использовать и традиционный подход: вычислить производную и приравнять её к нулю. Убедитесь самостоятельно, что при этом Вы получите уравнение (11), и в итоге – такой же результат (12).

Интересно, что согласно полученным данным устойчивость сосуда с водой, которая определяется высотой центра масс, по мере вытекания воды сначала увеличивается, а потом уменьшается. Данный эффект можно наблюдать на тубах с зубной пастой, которые по мере расхода пасты, бывает сложно поставить вертикально.

1.4 Находя из *Графика 1* абсциссу минимума функции $x_1 = 0{,}55$ дм, выразим из (12) массу m_1 сосуда вторым способом

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1-x_1)} x_1^2 = 0{,}2638 \text{ кг} \approx 0{,}26 \text{ кг}. \qquad (13)$$

Для сравнения этого метода определения массы с методом из предыдущего пункта, находим относительную погрешность определения массы сосуда

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1} = 0{,}3~\%, \qquad (14)$$

что является отличным результатом для обработки графика «народным» методом «на глаз».

После завершения всех расчётов данной части задачи можно признаться (☺), что построение *Графика 1* проводилось при значении безразмерного параметра

$$A = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1} = 3{,}00. \qquad (15)$$

Приятно, что мы с хорошей точностью смогли вычислить этот параметр (см. (9)), обрабатывая представленный в условии график.

Часть 2. «Простой» сосуд

2.1 Поскольку стенки и дно сосуда имеют одинаковую толщину $d (d \ll R)$, то массу m_3 дна сосуда выразим как

$$m_3 = \rho_1 V = \rho_1 S_3 d = \rho_1 d\pi R^2, \qquad (16)$$

где $S_3 = \pi R^2$ – площадь дна сосуда. Соответственно, массу стенок найдем как

$$m_4 = \rho_1 d S_4 = \rho_1 d 2\pi R H, \qquad (17)$$

где H – искомая высота сосуда.

Так как центр масс сосуда без воды (Рис. 3) находиться на высоте h_1 от дна (см. (1)), то справедливо равенство (толщиной дна здесь пренебрегаем)

$$h_1 = \frac{m_3\cdot 0 + m_4(H/2)}{m_3+m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H (H/2)}{\rho_1 d\pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R+2H}. \qquad (18)$$

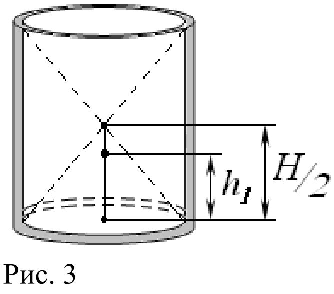


Рис. 3

Из (18) находим

$$H^2 - 2h_1 H - h_1 R = 0 \qquad (19)$$

Откуда

$$H = h_1\left(1 + \sqrt{1+\frac{R}{h_1}}\right) = 22 \text{ см}. \qquad (20)$$

2.2 Для определения толщины стенок сосуда воспользуемся тем, что мы уже вычислили его массу (см. (13)), тогда

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = m_3 + m_4 = \rho_2 d\pi R^2 + \rho_2 d 2\pi R H = \rho_2 d\pi R(R + 2H)\,, \qquad (21)$$

откуда находим

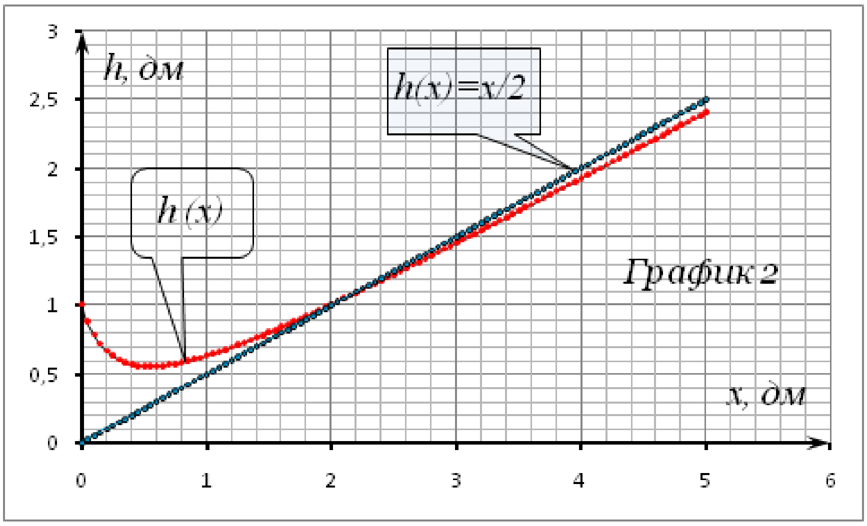
$$d = \frac{m_1}{\rho_2 \pi R(R + 2H)} = 2{,}1 \text{ мм}\,. \qquad (22)$$

Часть 3. Наливаем обратно …

3.1 Для решения данного пункта достаточно заметить, что при больших x ($x \to \infty$) масса $m_2 = \rho V = \rho\pi R^2 x$ воды в сосуде будет значительно превышать массу самого сосуда. Это значит, что положение центра масс системы практически будет совпадать с положением центра масс столба воды, т.е. находиться на половине его высоты.

Иными словами, в данном интервале функция будет стремиться к зависимости

$$h(x) \approx \frac{x}{2}\,, \qquad (23)$$



оставаясь немного ниже ее, т.к. масса сосуда всё же отлична от нуля. На всякий случай, используя ((4) или (7)) можно просчитать несколько точек, чтобы убедиться в справедливости приближения (23)

x, дм	$h(x) = \dfrac{2m_1h_1 + \rho\pi R^2 x^2}{2(m_1 + \rho\pi R^2 x)}$	$h(x) = \dfrac{x}{2}$	ε, (%)
2,0	1,00	1,00	0,0
2,5	1,22	1,25	2,4
3,0	1,45	1,50	3,3
3,5	1,68	1,75	4,0
4,0	1,92	2,00	4,0
4,5	2,16	2,25	4,0
5,0	2,41	2,50	3,6

Как следует из таблицы, эти графики на указанном интервале с приемлемой точностью «совпадают» друг с другом. На *Графике 2* (на всякий случай!) приведено точное построение (от школьников не требуется), из которого видно, что в данной части задачи действительно вполне достаточно догадаться пренебречь массой сосуда и записать (и построить!) функцию $h(x) \approx \frac{x}{2}$ (можно несколько «ниже» точного значения).