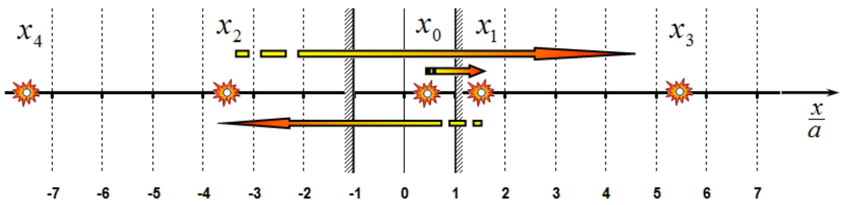
<u>*Решения задач*</u>

9 класс

Задача 9-1. Зеркала

1.1 Очевидно, что в данном случае число изображений будет бесконечно велико, из-за многократных отражений в параллельных зеркалах. Изображение в плоском зеркале располагается симметрично, т.е. расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.



Это позволяет записать координату первого изображения в правом зеркале (см. рис.)

$$x_1 = a + (a - x_0) = 2a - x_0 . \qquad (1)$$

Далее следует отобразить это изображение в левом зеркале, используя тоже правило построения:

$$x_2 = -a - (x_1 + a) = -2a - x_1 . \qquad (2)$$

После этого строим очередные изображения (сначала в правом зеркале, затем в левом) по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} \\ x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} \end{aligned} \qquad (3)$$

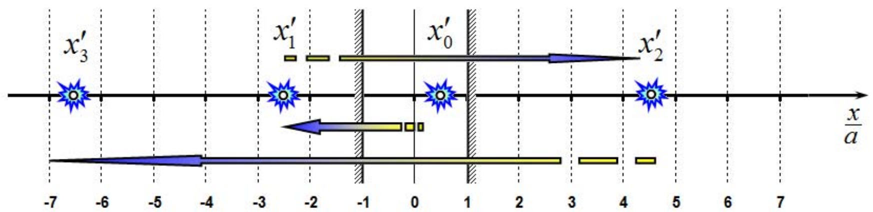
Координаты этих изображений можно выразить и в явном виде. Для этого отдельно выразим координаты четных и нечетных изображений

$$\begin{aligned} x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} = -2a - (2a - x_{2n-2}) = x_{2n-2} - 4a \\ x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} = 2a - (-2a - x_{2n-1}) = x_{2n-1} + 4a \end{aligned} \qquad (4)$$

Из этих формул следует. что эти координаты образуют арифметические прогрессии

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2}a - 4na \quad n = 0,1,2... \\ x_{2n+1} &= \frac{3}{2}a + 4na \quad n = 0,1,2... \end{aligned} . \qquad (5)$$

Аналогично следует построить вторую серию изображений, начиная с левого зеркала.



Для этой серии формулы для расчета координат имеют вид:

- для двух первых изображений:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -a - (x_0 + a) = -x_0 - 2a \\ x'_2 &= a + (a - x'_1) = -x'_1 + 2a \end{aligned} \qquad (6)$$

- для последующих изображений:

$$\begin{aligned} x'_{2n+1} &= -x_{2n} - 2a \\ x'_{2n+2} &= -x'_{2n+1} + 2a \end{aligned} . \qquad (7)$$

- наконец в явном виде:

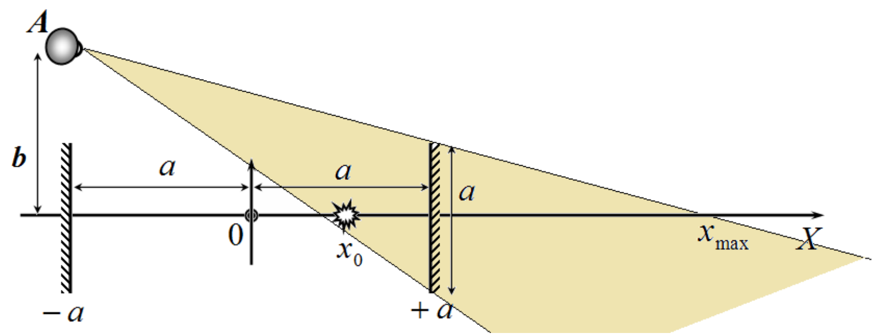
$$\begin{cases} x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a = -(-x'_{2n-1} + 2a) - 2a = x'_{2n-1} - 4a \\ x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a = -(-x'_{2n} - 2a) + 2a = x'_{2n} + 4a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x'_{2n} = \frac{1}{2}a + 4na \\ x'_{2n+1} = -\frac{5}{2}a - 4na \end{cases} . \qquad (8)$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные значения координат (в см) нескольких первых изображений.

n	$x_{2n+1} = 2a - x_{2n}$	$x_{2n} = -2a - x_{2n-1}$	$x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a$	$x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a$
1	15		-25	
2		-35		45
3	55		-65	
4		-75		85
5	95		-105	

Теперь следует определить, какие из этих изображений видны с указанной точки расположения глаза. Из рисунка следует, что область видимости определяется размером правого зеркала, которое можно рассматривать как «окошко» через которое рассматривают изображения. Область видимости ограничивается крайним верхним лучом, отраженным от этого зеркала.



Из подобия треугольников следует, максимальная координата x_{max} точки оси, которая видна из точки A, определяется уравнением

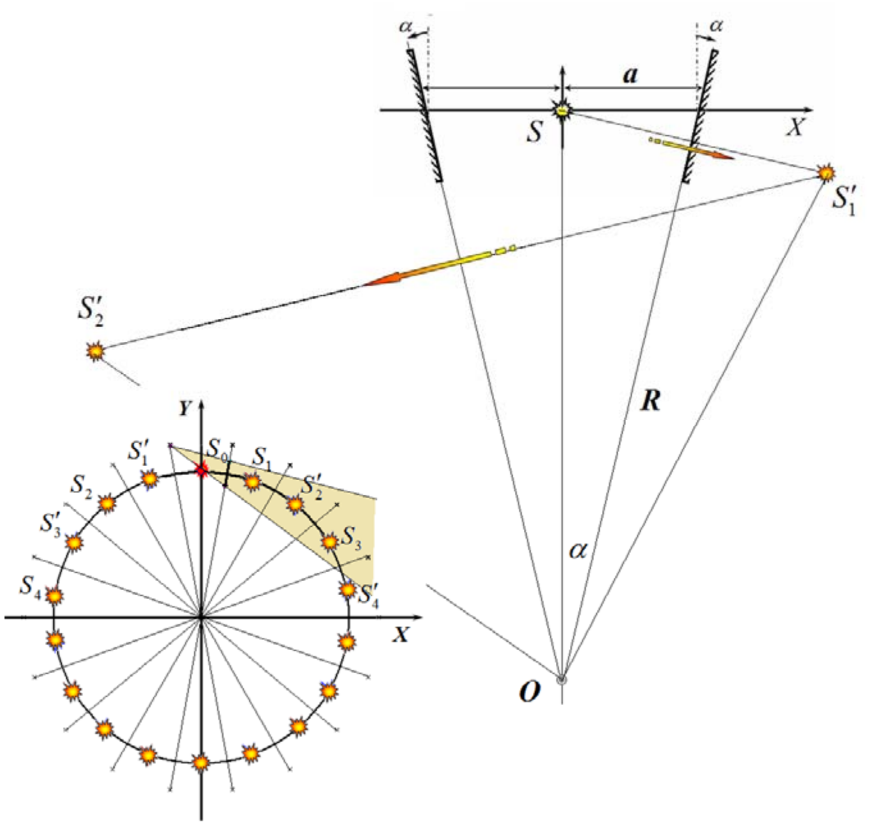
$$\frac{b}{x_{max} + a} = \frac{0,5a}{x_{max} + a}, \qquad (9)$$

Из которого следует, что

$$x_{\max} = \frac{ab + 0{,}5a^2}{b - 0{,}5a} = 26{,}7\,см. \qquad (10)$$

Таким образом, при указанном положении глаза видно только одно изображение с координатой $x_1 = 15\,см$.

1.2 Если зеркала повернуть, то изображения выстоятся по окружности, центр которой O лежит в точке пересечения линий зеркал.



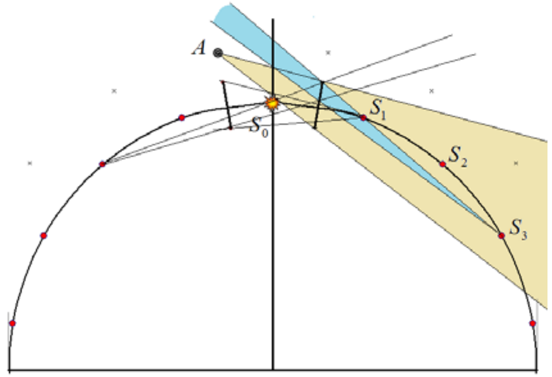
Действительно, первое изображение S_1' расположено симметрично плоскости правого зеркала, т.е. на том же расстоянии от точки O, что и источник S, аналогично и для всех последующих изображений. Как и параллельном расположении зеркал, следует построить две серии изображений: в первой серии начиная с правого зеркала, во второй – с левого.
Из рисунка следует, что радиус окружности, на которой лежат все изображения, равен

$$R = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 57{,}6\,см \qquad (11)$$

Также нетрудно заметить, что угловое расстояние между соседними изображениями равно $\Delta\varphi = 2\alpha = 20°$. Для того, чтобы записать формулы для координат изображений удобно сместить начало координат в центр окружности. В этой системе координаты изображений описываются простыми формулами

$$\begin{cases} x_k = R\sin k\Delta\varphi \\ y_k = R\cos k\Delta\varphi \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots 17. \qquad (12)$$

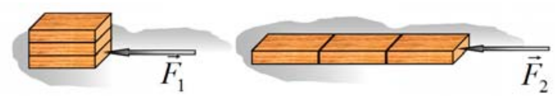
Далее можно построить положения всех изображений, положение зеркал и глаза наблюдателя и анализ видимости провести геометрически.



Такое построение показано на рисунке. Опять, рассматривая зеркало, как « окошко» находим, что в область видимости попадают только три изображения (по нумерации формул (12)). Однако, в данном случае далеко лучи отраженные от зеркал не полностью покрывают следующее зеркало. Поэтому необходимо аккуратно построить крайние лучи, которые принимают участие в формировании следующего изображения. Такое построение показывает, что третье изображение не видно с точки расположения глаза. На рисунке выделен пучок лучей, который формирует это изображение – глаз находится вне этого пучка!
Таким образом, в рассматриваемой ситуации видны только два изображения, координаты которых равны

$$\begin{cases} x_1 = 19{,}7\,см \\ y_1 = 54{,}1\,см \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 37{,}0\,см \\ y_1 = 44{,}1\,см \end{cases}. \qquad (13)$$

Задача 2. В память о лесосплаве



2.1 Чтобы сдвинуть бруски необходимо приложить силу превышающую силу трения. В соответствии с законном Кулона-Амонтона сила трения не зависит от площади соприкосновения, а определяется силой нормальной реакции. В обоих случаях сила трения (и равная ей минимальная сила) равна

$$F = \mu N = 3\mu mg. \qquad (1)$$

2.2 Между брусками, сложенными стопкой, действуют силы трения, максимальные значения которых равны:
- между верхним и средним

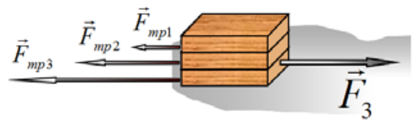
$$F_{тр1} = \mu mg, \qquad (2)$$

- между средним и нижним

$$F_{тр2} = 2\mu mg, \qquad (3)$$

- между нижним и столом

$$F_{тр3} = 3\mu mg. \qquad (4)$$



Таким образом, если прикладывать внешнюю силу к среднему бруску, то нижний брусок не сдвинется: со стороны среднего будет действовать сила $F_{тр2} = 2\mu mg$, а тормозить его будет большая сила $F_{тр3}$. Следовательно, чтобы сдвинуть стопку целиком, внешнюю силу $\vec{F}_3$ следует прикладывать к нижнему бруску. Максимальная сила, которая сообщает ускорение среднему и верхнему брускам при движении нижнего, есть сила трения $F_{тр2} = 2\mu mg$. Поэтому максимальное ускорение, с которым могут двигаться вместе верхний и средний бруски, равно

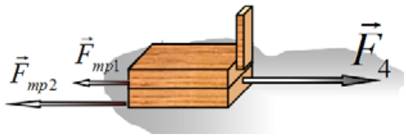
$$a_{\max} = \frac{2\mu mg}{2m} = \mu g\,. \qquad (5)$$

Заметим, что максимальная сила трения, действующая на верхний брусок, равна $F_{тр1} = \mu mg$, поэтому она в состоянии сообщить и верхнему бруску такое же ускорение, следовательно, и верхний брусок при этом не сдвинется.

Таким образом, искомая сила $\vec{F}_3$ может быть найдена из условия, что все бруски движутся с ускорением $a_{\max}$:

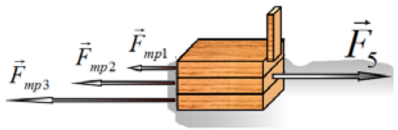
$$F_3 - 3\mu mg = 3ma_{\max} \quad \Rightarrow \quad F_3 = 6\mu mg\,. \qquad (6)$$

2.3 Минимальная сила, которую следует приложить в этом случае, должна превышать суммарную силу трения, действующую на нижний брусок, как со стороны верхнего бруска, так и со стороны стола, т.е.



$$F_4 = \mu mg + 2\mu mg = 3\mu mg\,. \qquad (7)$$

2.4 Как следует из рисунка, распределение силе, действующих на два верхних бруска, такое же, как и в предыдущем случае, поэтому минимальная сила, которая необходима для того, чтобы выдернуть средний брусок такая же



$$F_5 = 3\mu mg\,. \qquad (8)$$

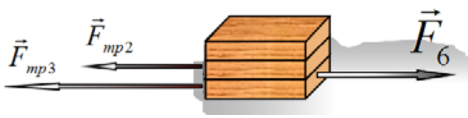
Как отмечалось ранее, нижний брусок при этом со своего места не сдвинется.

2.5 Чтобы выдернуть нижний брусок, необходимо сообщить ему ускорение большее, чем $a_{\max}$, найденное в п. 2.2. Записывая уравнение второго закона Ньютона для нижнего бруска,

$$ma_{\max} = F_6 - 5\mu mg\,, \qquad (9)$$

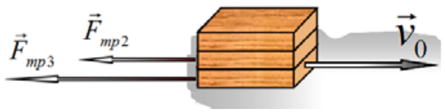
Получим

$$F_6 = 6\mu mg \qquad (10)$$



2.6 Пока нижний брусок не выскочил из-под стопки на него действовала сила трения $5\mu mg$.

Уравнение движения нижнего бруска на



этом этапе имеет вид

$$ma = -5\mu mg\,. \qquad (11)$$

Так как все силы постоянны, то движение бруска являлось равноускоренным, поэтому можно записать

$$m\frac{v_0 - v_1}{\Delta t} = 5\mu mg\,. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что длительность соскальзывания равно

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5\mu g}\,. \qquad (13)$$

Два верхних бруска, как было показано ранее, будут двигаться вместе с ускорением $a = \mu g$. Поэтому к моменту соскальзывания с нижнего бруска верхние приобретут скорость

$$v_2 = \mu g\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5}\,. \qquad (14)$$

При движении по столу путь бруска от начальной скорости V_0 до остановки можно найти по кинематической формуле

$$S = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{V_0^2}{2\mu g} \qquad (15)$$

Следовательно, после выскальзывания нижний брусок пройдет путь

$$S_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g}\,, \qquad (16)$$

а верхние

$$S_2 = \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g}\,. \qquad (17)$$

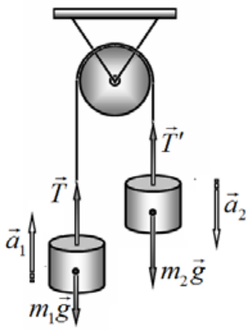
Если $S_1 > S_2$, то расстояние между брусками после остановки будет равно

$$S_1 - S_2 = \frac{v_1^2}{2\mu g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g}\,. \qquad (18)$$

В противном случае расстояние между брусками станет равным нулю. Это условие будет выполнено при

$$\frac{v_1^2}{2\mu g} < \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g} \quad \Rightarrow \quad 5v_1 < v_0 - v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 < \frac{v_0}{6}\,. \qquad (19)$$

Задача 3. Равноускоренные колебания



Хорошо известна задача о движении грузов на нити, переброшенной через блок.
Уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов (с учетом равенства модулей ускорений и равенства модулей сил натяжения нитей) имеют вид

$$\begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T \\ m_1 a &= T - m_1 g \end{aligned} \qquad (1)$$

Из этой системы следует формула для ускорения грузов (положительное направление ускорения указано на рисунке)

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\,. \qquad (2)$$

Способ решения 1. Чисто кинематический.
Последовательно рассмотрим все этапы движения системы, описанной в условии задачи.
При движении вниз между уровнями ***A*** и ***B*** ускорение грузов в соответствии с полученной формулой (2) равно

$$a_1 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2 + m_3 + m_1} g = \frac{0{,}99 + 0{,}02 - 1{,}00}{0{,}99 + 0{,}02 + 1{,}00} \cdot 10 \frac{м}{c^2} \approx 5{,}0 \frac{см}{c^2} \qquad (3)$$

Когда правый груз пройдет расстояние h, его скорость находится из формулы

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ah} \qquad (4)$$

Если малый груз снят, то ускорение системы равно

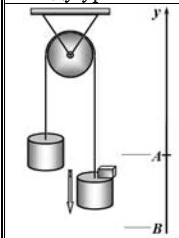
$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{0{,}99 - 1{,}00}{0{,}99 + 1{,}00} \cdot 10 \frac{м}{c^2} \approx -0{,}50 \frac{см}{c^2} \qquad (5)$$

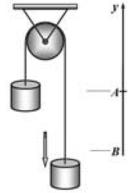
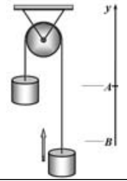
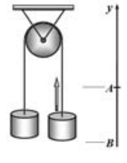
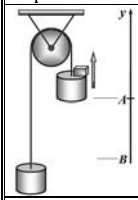
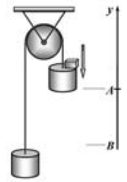
Дальнейшее движение будет происходить с отрицательным ускорением, путь, который пройдет до остановки, и минимальная координата находится по формулам

$$\Delta y = \frac{v_1^2}{2a_2} \quad \Rightarrow \quad y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a_2} \qquad (6)$$

Остальные формулы для расчета характерных точек находятся аналогично. Для удобства численных расчетов все формулы сведены в единую таблицу. В таблице модуль ускорения обозначен $a = 0{,}50 \frac{см}{c^2}$, в строках скоростей и ускорений приведены их проекции на вертикальную ось y.

Таблица 1. Кинематический расчет закона движения

	Параметр	Формула
Движение вниз между уровнями ***AB***	Начальная скорость	v_0
	Ускорение	$a_1 = -a$
	Конечная скорость	$v_1 = -\sqrt{v_0^2 + 2ah}$
	Конечная координата	$-h$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_1 - v_0}{a} \right\rvert$

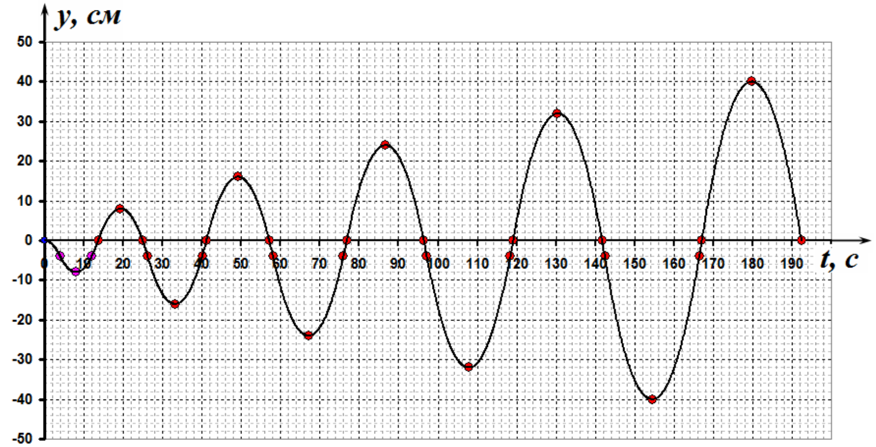
Движение вниз от уровня ***B*** до нижней точки	Начальная скорость	v_1
	Ускорение	$a_2 = a$
	Конечная скорость	0
	Конечная координата	$y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a}$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_1}{a} \right\rvert$
Движение вверх от нижней точки до уровня ***B***	Начальная скорость	0
	ускорение	$a_2 = a$
	Конечная координата	$-h$
	Конечная скорость	$-v_1$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_1}{a_2} \right\rvert$
Движение вверх между уровнями ***AB***	Начальная скорость	$-v_1$
	Ускорение	$a_2 = a$
	Конечная координата	0
	Конечная скорость	$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2ah}$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_2 - v_1}{a} \right\rvert$
Движение от вверх от уровня ***A*** до верхней точки	Начальная скорость	v_2
	Ускорение	$a_2 = -a$
	Конечная скорость	0
	Конечная координата	$y_{\max} = \frac{v_2^2}{2a}$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_2}{a} \right\rvert$
Движение вниз от верхней точки до уровня ***A***	Начальная скорость	0
	Ускорение	$a_2 = -a$
	Конечная скорость	$-v_2$
	Конечная координата	0
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_2}{a} \right\rvert$

Результаты необходимых численных расчетов приведены в таблице 2. (координаты в см, время в с)

Таблица 2. Расчет закона движения

	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$	
	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t
y_A	0,0	0,00	0,0	24,97	0,0	57,17	0,0	96,45	0,0	141,76
y_B	-4,0	4,00	-4,0	26,24	-4,0	58,11	-4,0	97,24	-4,0	142,45
$y_{\min}$	**-8,0**	**8,00**	**-16,0**	**33,17**	**-24,0**	**67,06**	**-32,0**	**107,82**	**-40,0**	**154,45**
y_B	-4,0	12,00	-4,0	40,10	-4,0	76,00	-4,0	118,40	-4,0	166,45
y_A	0,0	13,66	0,0	41,17	0,0	76,86	0,0	119,13	0,0	167,10
$y_{\max}$	**8,0**	**19,31**	**16,0**	**49,17**	**24,0**	**86,65**	**32,0**	**130,45**	**40,0**	**179,75**

График рассчитанной зависимости показан на рисунке.



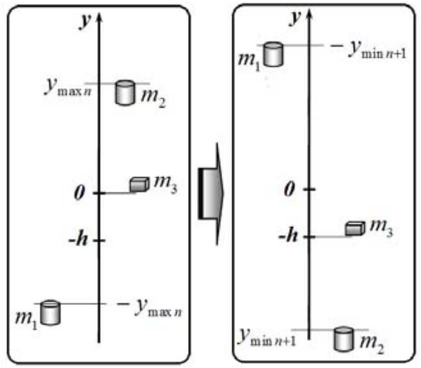
Проведенные расчеты показывают, зависимости минимального и максимального смещения от номера цикла имеют простой вид

$$y_{\min} = -8{,}0n\ (см)$$
$$y_{\min} = +8{,}0n\ (см) \qquad (7)$$

Способ решения 2. «Энергетически-кинематический»

Полученные соотношения слишком просты, чтобы быть случайными – поэтому возможен второй, более «быстрый» способ решения, основанный не только на кинематических формулах. Заметим, что система получает дополнительную энергию при движении вниз с грузом m_3.

Рассмотрим изменение энергии системы между крайними точками, в которых скорости грузов равны нулю.

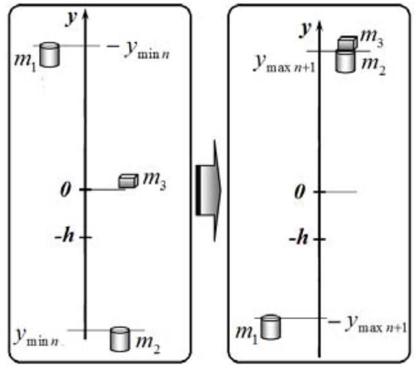


а) Опускание: груз m_2 движется от крайнего верхнего положения $y_{\max n}$ до следующего крайнего нижнего положения $y_{\min n+1}$. На этом этапе груз m_3 опустился на высоту h (от уровня ***A*** до уровня ***B***). Начальные и конечные положения всех грузов показаны на рисунке. Поэтому уравнение закона сохранения энергии имеет вид

$$m_2 y_{\max n} - m_1 y_{\max n} = m_2 y_{\min n+1} - m_1 y_{\min n+1} - m_3 h,$$

из которого следует (с учетом численных значений масс грузов):

$$y_{\min n+1} = y_{\max n} + \frac{m_3}{m_2 - m_1} h = y_{\max n} - 2h.$$



Б) Подъем: груз m_2 поднимается от крайнего нижнего положения $y_{\min n}$ до следующего крайнего верхнего положения $y_{\max n+1}$. Учитывая, что груз m_3 кладут на уровне ***A***, изобразим начальные и конечные положения грузов и запишем уравнение закона сохранения энергии в этом случае

$$m_2 y_{\min n} - m_2 y_{\min n} = (m_2 + m_3) y_{\max n+1} - m_1 y_{\max n+1},$$

из которого находим (опять с учетом масс грузов)

$$y_{\max n+1} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_3 - m_1} y_{\min n} = -y_{\min n}.$$

Полученные формулы сразу приводят к полученным ранее формулам (7). Далее традиционным способом находим ускорения грузов при движении с грузом m_3 ($a_1 = -a = -5{,}0\frac{см}{c^2}$) и без него ($a_2 = +a = 5{,}0\frac{см}{c^2}$).

Далее отмечаем, что движение без дополнительного груза m_3 происходит на участках $-h \to y_{\min} \to -h \to 0$, а движение с дополнительным грузом на участках $0 \to y_{\max} \to 0 \to -h$. Так как модули ускорений на этих участках одинаковы и максимальные смещения также одинаковы, то графики законов движения (параболы) на этих участках тоже одинаковы, только перевернуты. Эти рассуждения позволяют заметно сократить расчеты, начиная каждый цикл с момента прохождения вниз уровня ***B***. Сначала следует «подойти» к началу первого цикла: рассчитать время первого прохождения точки $y = -h$ по формуле $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4{,}0c$. После этого рассчитать максимальное смещение груза в цикле по формуле $Y = 8n\,(см)$, а также три интервала времени прохождения соответствующих отрезков (они показаны на рисунке) по формулам

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y-h}{2a}} = \sqrt{8n-4} = 2\sqrt{2n-1}$$

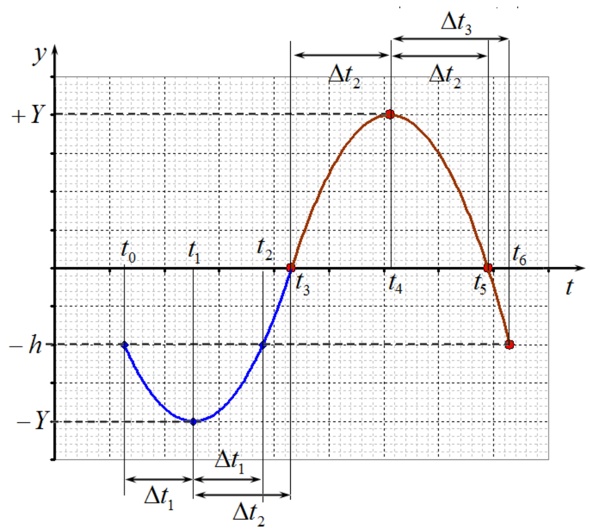
$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{Y}{2a}} = \sqrt{8n} = 2\sqrt{2n}$$

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y+h}{2a}} = \sqrt{8n+4} = 2\sqrt{2n+1}$$

После чего вычисления времен прохождения каждой характерной точки рассчитываются простым суммированием (для удобства схема расчета сведена в таблицу 3.

Таблица 3. Схема расчета времен характерных точек.

$n =$	
	$Y = 8n =$
	$\Delta t_1 = 2\sqrt{2n-1}$
	$\Delta t_2 = 2\sqrt{2n}$
	$\Delta t_3 = 2\sqrt{2n+1}$
y	t
-4	$t_0 =$
$-Y$	$t_1 = t_0 + \Delta t_1$
-4	$t_2 = t_1 + \Delta t_1$
0	$t_3 = t_1 + \Delta t_2$
$+Y$	$t_4 = t_3 + \Delta t_2$
0	$t_5 = t_4 + \Delta t_2$
-4	$t_6 = t_4 + \Delta t_3$



Очевидно, что результаты расчетов по этой схеме приводят к тем же результатам.