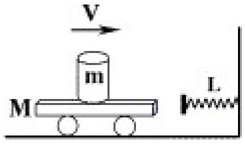
Питер. Районный тур. 2002 год. 11 класс. Условия задач.
1 вариант

Задача 1.



Тележка массой M, двигающаяся со скоростью v прямолинейно, наталкивается на легкую пружину длиной L, прикрепленную к стене (см рис). На тележке закреплен хрупкий предмет массы m, который разбивается, если его перемещать с ускорением больше чем a_0. Какой должна быть жесткость пружины, чтобы в процессе столкновения хрупкий предмет не разбился? Трением тележки о пол пренебречь. Пружину считать идеальной при любой длине от 0 до L.

Решение.

Обозначим через k искомую жесткость пружины.

Если пружина в какой-то момент сжата в результате взаимодействия с тележкой на величину x, то сила $F = kx$, с которой пружина действует на тележку, обеспечивает ускорение a, которое испытывает тележка вместе с находящимся на ней предметом

$$kx = (M + m)a$$

Поскольку предмет бьется при ускорениях больше чем a_0, то ускорение, которое он испытывает при любом сжатии пружины, не должно превышать a_0:

$$a = \frac{kx}{M+m} \le a_0 \quad \text{– 2 балла} \qquad (1)$$

Пружина сжата максимально, когда вся кинетическая энергия системы перешла в потенциальную энергию пружины, т.е. когда

$$\frac{kx_{max}^2}{2} = \frac{(M+m)V^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{max} = V\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

Подставляя x_{max} в неравенство (1) и выражая оттуда k, получим первое условие на k:

$$k \le \frac{a_0^2(M+m)}{V^2} \qquad (2)$$

Таким образом, если пружина чересчур жесткая, предмет разобьется. **- 2 балла**

С другой стороны, если пружина чересчур мягкая, она не сможет предотвратить столкновение тележки со стеной, и предмет разобьется при ударе. Чтобы этого не произошло, x_{max} не должно превышать L

$$x_{max} = V\sqrt{\frac{M+m}{k}} \le L \quad \Rightarrow \quad k \ge \frac{(M+m)V^2}{L^2} \quad \text{– 3 балла} \qquad (3)$$

Итак, согласно неравенствам (2) и (3), чтобы хрупкий предмет не разбился, жесткость пружины должна удовлетворять двойному неравенству

$$\frac{(M+m)V^2}{L^2} \le k \le \frac{a_0^2(M+m)}{V^2} \quad \text{– 1 балл} \qquad (4)$$