

Решение. 11 класс

Задание 11-1. Шарик на спице.

Задача 1. 1 шарик.

1.1 Проще всего найти зависимость скорости шарика от угла отклонения с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \sin \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gl \sin \alpha}. \quad (1)$$

1.2 Так как стержень жесткий, то в нем возможны силы, направленные перпендикулярно стержню. Поэтому, прежде всего, следует рассмотреть наличие такой нормальной силы \vec{N} действующей на шарик. Для нахождения неизвестных сил можно использовать 2 закон Ньютона. Так как мы нашли зависимость скорости от угла поворота, то не составляет труда найти тангенциальное ускорение шарика (т.е. проекцию этого ускорения на вектор скорости). Для этого достаточно вычислить производную от вектора скорости

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dv}{d\alpha} = \frac{v}{l} \frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{2l} \frac{d(v^2)}{d\alpha}$$

При выводе этого соотношения использовано правило вычисления производной от сложной функции. Так как $v^2 = 2gl \sin \alpha$, то

$$a_\tau = \frac{1}{2l} \frac{d(v^2)}{d\alpha} = g \cos \alpha \quad (2)$$

Примечание. Величину тангенциального ускорения можно найти и из простого кинематического соотношения

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \quad (3)$$

Рассматривая малое смещение шарика на угол $\Delta\alpha$, и пренебрегая изменением ускорения на этом участке можно считать, что путь, пройденный шариком, равен $S = l\Delta\alpha$. Тогда из формулы (3) следует, что $a_\tau = \frac{\Delta(v^2)}{2l\Delta\alpha}$.

Запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на вектор скорости

$$ma_\tau = mg \cos \alpha - N \quad (4)$$

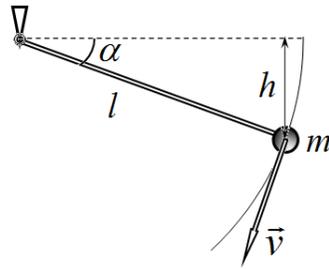


Рис. 1

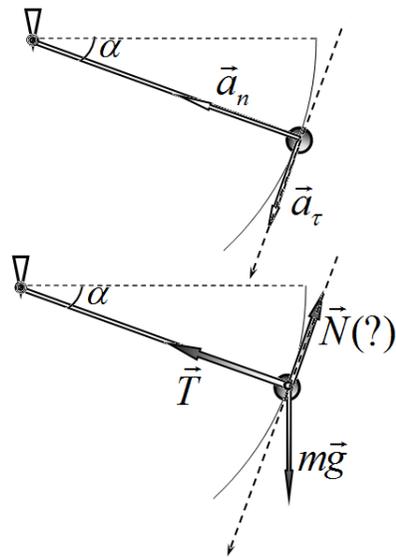


Рис.2

Из этого уравнения с учетом найденного ускорения (2) следует, что в данном случае нормальная составляющая силы реакции отсутствует $N = 0$.

Таким образом, мы показали, что сила, действующая на шарик со стороны стержня, направлена вдоль стержня. Для ее определения запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на направление стержня:

$$ma_n = T - mg \sin \alpha \quad (5)$$

В данном уравнении проекция ускорения перпендикулярна вектору скорости, поэтому это есть нормальное ускорения, которое, как известно, определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g \sin \alpha \quad (6)$$

Здесь опять использовано выражение для величины модуля скорости (1).

Из формул (5)-(6) следует, что

$$T = 3mg \sin \alpha. \quad (7)$$

1.3 Проекция ускорения можно найти различными способами. Мы используем разложение вектора ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие, которые уже найдены. Из рис. 3 следует, что проекции ускорения на указанные оси координат равны

$$\begin{aligned} a_x &= -a_n \cos \alpha - a_\tau \sin \alpha \\ a_y &= -a_n \sin \alpha + a_\tau \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

Используя найденные значения тангенциального (2) и нормального (6) ускорений, получим

$$a_x = -a_n \cos \alpha - a_\tau \sin \alpha = -2g \sin \alpha \cos \alpha - g \cos \alpha \sin \alpha = -3g \sin \alpha \cos \alpha \quad (8)$$

$$a_y = -a_n \sin \alpha + a_\tau \cos \alpha = -2g \sin \alpha \sin \alpha + g \cos \alpha \cos \alpha = -2g \sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha$$

Эти же выражения можно получить из уравнений 2 закона Ньютона в проекциях на оси координат.

1.4 Фактически функции (8) определяют уравнение годографа вектора ускорения в параметрической форме. Однако, предадим этим функциям несколько иной вид, используя тригонометрические формулы двойного угла:

$$a_x = -3g \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2} g \sin 2\alpha. \quad (9)$$

$$a_y = -2g \sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha = g - 3g \sin^2 \alpha = g - 3g \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{3}{2} g \cos 2\alpha - \frac{1}{2} g. \quad (10)$$

Теперь не сложно заметить, что эти уравнения задают окружность:

$$a_x^2 + \left(a_y + \frac{1}{2}g\right)^2 = \left(\frac{3}{2}g\right)^2 \quad (11)$$

Эта окружность показана и является годографом вектора ускорения.

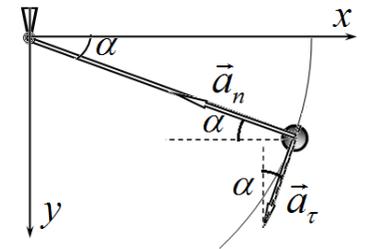
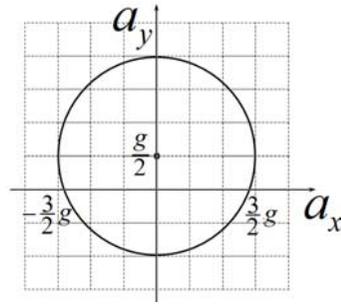


Рис. 3

Она показана на рис. 4. Отметим, что угол α изменяется в пределах от 0 до π , поэтому конец вектора ускорения описывает полную окружность.



1.5 Центр окружности смещен вдоль оси a_y на величину $\frac{g}{2}$, радиус окружности равен $\frac{3}{2}g$. Следовательно, в системе отсчета, движущейся вверх с постоянным ускорением $\frac{g}{2}$, модуль ускорения будет постоянным и равным $\frac{3}{2}g$.

Задача 2. 2 шарика

2.1 Так как стержень жесткий, то шарики будут двигаться с одинаковыми угловыми скоростями ω . Поэтому скорости шариков будут равны

$$v_1 = \omega \frac{l}{2}, \quad v_2 = \omega l. \quad (12)$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемой системы

$$\frac{1}{2} \frac{m}{2} \omega^2 l^2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{m}{2} gl \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \sin \alpha \quad (13)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость вращения стержня зависит от угла отклонения по закону

$$\omega = \sqrt{\frac{12}{5} \frac{g}{l} \sin \alpha}. \quad (14)$$

2.2 Для расчета ускорения воспользуемся кинематическим соотношением (3), которое применим для малого начального смещения на малый угол α . Для крайнего шарика запишем

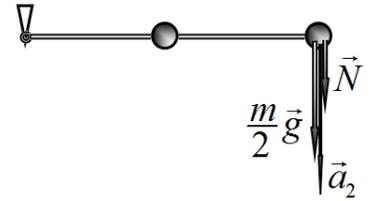
$$l\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{12}{5} \frac{g}{l} \sin \alpha \cdot l^2}{2l\alpha} = \frac{6}{5}g \quad (15)$$

Аналогично для первого шарика

$$\frac{l}{2}\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{12}{5} \frac{g}{l} \sin \alpha \cdot \frac{l^2}{4}}{2 \cdot \frac{l}{2} \alpha} = \frac{3}{5}g \quad (16)$$

Впрочем, очевидно, что ускорение первого шарика в два раза меньше. Отметим, что эти выражения могут быть получены прямым дифференцированием функции (14) с последующим переходом от углового ускорения стержня к линейным ускорениям шариков.

2.3 Обратим внимание, что в начальный момент времени ускорение крайнего шарика превышает ускорение свободного падения! Следовательно, со стороны стержня на шарик действует сила, направленная вертикально вниз. Силы реакции направленной вдоль стержня в данном положении нет, так как скорость шарика равна нулю. Записывая уравнение 2 закона Ньютона для крайнего шарика, получим



$$\frac{m}{2} a_2 = \frac{m}{2} g + N \Rightarrow N = \frac{m}{2} (a_2 - g) = \frac{mg}{10}. \quad (17)$$

Таким образом, в данной конфигурации внутри стержня возникают силы упругости, направленные перпендикулярно стержню.

Задача n. n шариков.

Решение этой задачи полностью аналогично решению предыдущей. Поэтому можно сократить комментарии к решению.

3.1 Записываем закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \frac{m}{n} l^2 \omega^2 \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) = \frac{m}{n} gl \left(\left(\frac{1}{n} \right) + \left(\frac{2}{n} \right) + \left(\frac{3}{n} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n} \right) \right) \sin \alpha \Rightarrow \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{gl}{n} \sin \alpha \sum_{k=1}^n k \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{gl}{n} \sin \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

Так как по условию $n \gg 1$, то в формулах для сумм можно оставить только высшие степени, поэтому получим

$$\frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \frac{n^3}{3} = \frac{gl}{n} \frac{n^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{3 \frac{g}{l} \sin \alpha} \quad (19)$$

Это же выражение можно получить гораздо проще из уравнения динамики вращательного движения.

3.2 Ускорение k-того шарика рассчитываем по прежней методике

$$\left(\frac{l}{n} k \right) \alpha = \frac{v_k^2(\alpha)}{2a_k} \Rightarrow a_k = \frac{3 \frac{g}{l} \sin \alpha \cdot \left(\frac{l}{n} k \right)^2}{2 \left(\frac{l}{n} k \right) \alpha} = \frac{3}{2} g \frac{k}{n}. \quad (20)$$

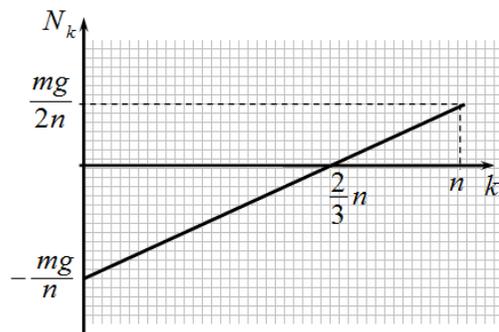
3.3 Так как ускорения шариков в начальный момент времени отличаются от ускорения свободного падения, то на эти шарики со стороны стержня действуют силы реакции направленные вертикально (положительное направление – вниз). Их величины также находим из уравнения 2 закона Ньютона

$$\frac{m}{n} a_k = \frac{m}{n} g + N_k \Rightarrow N_k = \frac{m}{n} g \left(\frac{3k}{2n} - 1 \right) \quad (21)$$

Как следует из полученной формулы при $\frac{k}{n} < \frac{2}{3}$ эти силы направлены вверх, далее – вниз.

На рисунке показана зависимость этих сил от номера шарика.

3.4 Природа этих сил – силы упругости, возникающие при малой деформации стержня.



3.5 Как было показано в этой задаче, при ускоренном вращательном движении массивного стержня в нем возникают силы упругости, направленные поперек стержня. Следовательно, такие же силы возникают и при падении трубы. Они-то ее и ломают!

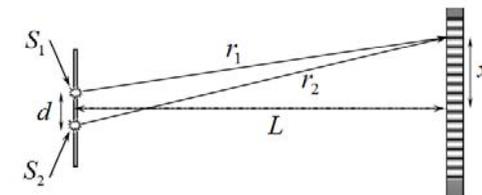
В последней части задачи показано, что направление поперечных сил меняется на противоположное на одной трети длины стержня, поэтому, скорее всего на этом же расстоянии и происходит разлом.

Задача 11- 2. Опыт Физо

Часть 1. Воспоминание об интерференции

Решение этой части задачи традиционное, оно изложено практически во всех учебниках физики. Поэтому ограничимся кратким изложением этого решения, с выделением деталей, существенных при описании экспериментов И. Физо.

1.1 В схеме Юнга интерферируют волны, идущие от двух источников S_1 и S_2 . В точке экрана с координатой x (измеренной от оси симметрии системы) интенсивность будет максимальна, если разность хода от источников до точки наблюдения равна целому числу длин волн, т.е.



$$r_2 - r_1 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Для расчета этой разности запишем на основании теоремы Пифагора

$$r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad (2)$$

$$r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

Вычтем второе равенство из первого

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xd \quad (3)$$

Так как значения r_2, r_1 мало отличаются от расстояния L , которое значительно больше как расстояния между отверстиями d , так и длины волны λ , можно положить $(r_2 + r_1) \approx 2L$. Поэтому разность расстояний описывается формулой

$$(r_2 - r_1) = \frac{xd}{L} \quad (3)$$

Использование условия максимумов интерференции (1) позволят найти координаты точек максимальной интенсивности:

$$\frac{x_m d}{L} = m\lambda \Rightarrow x_m = m \frac{\lambda L}{d} \quad (4)$$

Расстояние между соседними максимумами (т.е. ширина полосы) равно

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda L}{d} \quad (5)$$

Подстановка численных значений дает результат

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{0,55 \cdot 10^{-6} \cdot 2,0}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,1 \text{ мм} \quad (6)$$

1.2 Самый простой способ решения этой части задачи можно найти, используя следующие простые (но общие для любой интерференционной схемы) рассуждения. Переход от одной интерференционной полосы к следующей соответствует увеличению разности хода на одну длину волны! Поэтому если оптическая длина пути в одном из каналов увеличивается на одну длину волны, то интерференционная картина смещается на одну полосу!

Сделаем еще одно замечание, касающееся понятия оптической длины пути. В теории интерференции основную роль играет разность фаз между интерферирующими волнами. Эта разность фаз зависит от длины волны, а именно изменение расстояния на одну длину волны приводит к изменению фазы на 2π . Поэтому для изменения фазы можно записать соотношение

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda}. \quad (7)$$

Если свет распространяется в среде с показателем преломления n , то длина волны уменьшается в n раз, поэтому изменение фазы при распространении света в среде будет равно

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{(\lambda_0/n)} = 2\pi \frac{n\Delta r}{\lambda_0}. \quad (8)$$

где λ_0 - длина волны в вакууме.

При подобных расчетах удобно считать, что длина волны остается неизменной и равной λ_0 , а увеличивается длина пути. Именно в этом смысл введения такого понятия, как оптическая длина пути $l = n\Delta r$.

Теперь совсем просто найти смещение интерференционной картины при наличии стеклянной пластинки. Пластинка увеличивает оптическую длину пути для волн от верхнего источника на величину

$$\Delta l = (n-1)h. \quad (9)$$

Если это увеличение разделить на длину волны (в вакууме!), то получим величину смещения интерференционной картины в единицах ширины полосы, т.е.

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{\delta}{\Delta x} = \Delta m \quad (9)$$

В рассматриваемой задаче это смещение равно

$$\Delta m = \frac{(n-1)h}{\lambda} = \frac{(1,6-1) \cdot 5,0 \cdot 10^{-6}}{0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 5,5. \quad (10)$$

Таким образом, интерференционная картина сместится на пять с половиной полос вверх.

Часть 2. Эксперимент И. Физо – скорость света в движущейся воде.

2.1 Скорость света в неподвижной воде в n раз меньше скорости света в вакууме

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,33} = 2,26 \cdot 10^8 \frac{м}{с}. \quad (11)$$

2.2 В рамках гипотезы неподвижного эфира движение воды не влияет на скорость света, поэтому

$$v = \frac{c}{n}. \quad (12)$$

2.3 Если справедлива гипотеза полного увлечения эфира, то

$$v = \frac{c}{n} + V. \quad (13)$$

2.4 В общем случае следует записать

$$v = \frac{c}{n} + \gamma V. \quad (14)$$

При неподвижном эфире $\gamma = 0$, при полном увлечении $\gamma = 1$.

2.5 В данном эксперименте сдвиг интерференционных полос обусловлен изменением скорости света при изменении скорости течения воды, в результате чего изменяется длина волны света. Рассчитаем изменение длины волны в общем случае частичного увлечения эфира. Так как частота и период колебаний остаются неизменными, можно записать: Для длины волны ($\lambda_{(\pm)}$ - длины волн при движении «по и против» течения воды):

$$\frac{\lambda_0}{c} = \frac{\lambda_{(\pm)}}{\frac{c}{n} \pm \gamma V} \Rightarrow \lambda_{(\pm)} = \lambda_0 \frac{c \pm \gamma V}{c} \quad (15)$$

Для изменения разности хода в каждой трубе в единицах длин волн получим

$$\frac{L}{\lambda_{(\pm)}} = \frac{L}{\frac{c}{n} \pm \gamma V} = \frac{L}{\lambda_0} \cdot \frac{c}{c \pm \gamma V} = \frac{L}{\lambda_0} \frac{n}{1 \pm n\gamma \frac{V}{c}} \quad (16)$$

Теперь учтем, что $V \ll c$, поэтому можно это выражение упростить:

$$\frac{L}{\lambda_{(\pm)}} = \frac{L}{\lambda_0} \frac{n}{1 \pm n\gamma \frac{V}{c}} = \frac{Ln}{\lambda_0} \left(1 \mp n\gamma \frac{V}{c} \right) \quad (17)$$

Итак, при движении воды между волнами, распространяющимися в противоположных направлениях, возникает разность хода (и равный ей сдвиг полос)

$$\Delta m_1 = \frac{L}{\lambda_{(-)}} - \frac{L}{\lambda_{(+)}} = 2 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c}. \quad (18)$$

Так как свет проходит две трубы, то окончательное значение сдвига будет еще в два раза больше

$$\Delta m = 4 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c}. \quad (19)$$

Подставим численные значения и рассчитаем

$$\Delta m = 4 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c} = 4 \frac{1,49 \cdot 1,33^2}{526 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{7,06}{3,00 \cdot 10^8} \gamma = 0,472 \gamma. \quad (20)$$

Таким образом, при полном увлечении эфира сдвиг полос должен составить 0,478 ширины интерференционной полосы.

В результате измерений И. Физо получил значение сдвига

$$\Delta m_{\text{exp}} = \frac{1,2}{5} \approx 0,24, \quad (21)$$

что почти в 2 раза меньше теоретического сдвига.

2.6 Для объяснение наблюдаемого сдвига следует предположить, что коэффициент увлечения эфира водой равен

$$\gamma = \frac{0,24}{0,47} \approx 0,51 \quad (22)$$

Часть 3. Но эфира то нет!

3.1 Используя формулу для сложения скоростей в СТО для скорости света в движущейся среде получим

$$v = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{n}{c^2} \cdot V} = \frac{c}{n} \frac{1 + n \frac{V}{c}}{1 + \frac{1}{n} \frac{V}{c}} \approx \frac{c}{n} \left(1 + n \frac{V}{c} - \frac{1}{n} \frac{V}{c} \right) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) V. \quad (23)$$

3.2 Из формулы (23) следует, что коэффициент увлечения связан с показателем преломления соотношением

$$\gamma = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (24)$$

Его численное значение для воды равно

$$\gamma = 1 - \frac{1}{1,33^2} = 0,435. \quad (25)$$

Это значение близко к значению, найденному экспериментально.

3.3 При рассчитанном значении коэффициента увлечения сдвиг полос должен быть равен $\Delta m = 0,472\gamma \approx 0,205$, что несколько меньше полученного экспериментально. Основной причиной такого расхождения является метод измерения скорости жидкости. Использованное значение скорости является средней скоростью по площади поперечного сечения труб. В действительности свет проходил вблизи оси трубы, где скорость течения больше, чем среднее по сечению значение. В результате чего реальный сдвиг оказался немного больше рассчитанного. Это повлияло и на значение коэффициента увлечения.

Задача 11-3. Давление света. (Решение)

1. Свойства электромагнитных волн.

1.1 В условии задачи подсказано, что средние плотности энергии электрического и магнитного полей волны равны. Поэтому вычислим усредненные значения плотностей этих энергий. Мгновенное значение плотности энергии электрического поля описывается функцией

$$w_E(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} (E(t))^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \omega t \quad (1)$$

Усреднение по промежутку времени, значительно превышающему период световых колебаний, дает

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}. \quad (2)$$

При выводе учтено, что среднее значение квадрата косинуса равно $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$.

Аналогичные рассуждения дают аналогичный результат:

$$\langle w_B \rangle = \left\langle \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}. \quad (3)$$

Из равенства этих величин следует очень простое и красиво соотношение между амплитудами полей

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} B_0 = c B_0. \quad (4)$$

1.2 Рассмотрим небольшую прямоугольную площадку площади ΔS на которую нормально падает электромагнитная волна. На этой площадке, как на основании построим параллелепипед длиной $c\Delta t$. Вся энергия волны, заключенная в этом параллелепипеде за время Δt успеет проскочить через выделенную площадку. Поэтому за время Δt через площадку пройдет энергия равная

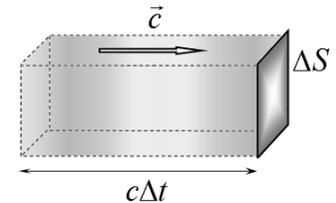
$$\Delta W = (w_E + w_B) \Delta S \cdot c\Delta t. \quad (5)$$

Усредняя по времени, получим $\Delta W = \langle w_E + w_B \rangle \Delta S \cdot c\Delta t$. Тогда интенсивность волны (по определению) будет равна

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = c \langle w_E + w_B \rangle. \quad (6)$$

Принимая во внимание полученные выражения для средних плотностей энергии электрического и магнитного полей, получим выражение для интенсивности волны:

$$I = c \langle w_E + w_B \rangle = 2c \langle w_E \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (7)$$



2. Движение электронов в металле и их электрическое сопротивление.

2.1 Считайте, что каждый атом меди отдает один электрон в облако свободных электронов.

Молярная масса меди $M_{Cu} = 63,5 \frac{г}{моль}$, плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \frac{г}{см^3}$, постоянная

Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} моль^{-1}$

2.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов в меди, которая рассчитывается элементарно:

$$n = \frac{\rho_{Cu}}{m_{Cu}} = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} N_A = \frac{8,92 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}}{63,5 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{моль} = 8,46 \cdot 10^{22} м^{-3}. \quad (8)$$

2.2 Напряженность электрического поля внутри металла равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем индуцированных зарядов. В данном случае индуцированные заряды локализируются на поверхности пластины, поэтому поверхностная плотность индуцированных зарядов связана с напряженностью создаваемого поля следующим соотношением

$$\sigma = \varepsilon_0 E \quad (9)$$

Здесь E - напряженность внешнего поля и она же напряженность поля индуцированных зарядов. Если площадь части пластинки равна S , то число электронов, находящихся на этой площадке равно $N' = \frac{\sigma S}{e}$ (e - заряд электрона), в то время как общее число свободных электронов в пластинке $N = nSh$. Таким образом, доля электронов, которые под действием внешнего поля переместились на поверхность, равна

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{\sigma}{enh} = \frac{\varepsilon_0 E}{enh}. \quad (10)$$

Подставляя численные значения параметров этой формулы (заметим, что $E = 30 \frac{кВ}{см} = 3,0 \cdot 10^6 \frac{В}{м}$), получим

$$\eta = \frac{\varepsilon_0 E}{enh} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,0 \cdot 10^6}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 8,46 \cdot 10^{22} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} = 2,0 \cdot 10^{-7}. \quad (10)$$

Очень маленькая доля!

2.3 При установившемся значении силы тока электроны движутся с постоянной скоростью (конечно, в среднем), в этом случае сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравновешивается силой сопротивления

$$eE = \beta v. \quad (11)$$

Отсюда следует, что средняя скорость движения электронов равна

$$v = \frac{eE}{\beta}. \quad (12)$$

Тогда плотность тока равна

$$j = env = \frac{e^2 n}{\beta} E. \quad (13)$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме, который традиционно записывается в виде

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (14)$$

Сравнивая эти выражения, находим, что искомый и не совсем понятный коэффициент может быть рассчитан по вполне измеряемым параметрам

$$\beta = \frac{\rho}{ne^2}. \quad (15)$$

3. Давление света на поверхность металла.

3.1 Уравнение движение свободного электрона по второму закону Ньютона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t. \quad (16)$$

m - масса электрона, a - его ускорение.

Из этого уравнения следует, что скорость электрона зависит от времени по закону

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \quad (17)$$

Вектор скорости лежит в той же плоскости, что и вектор напряженности электрического поля.

3.2 Так как вектор скорости электрона и вектор индукции магнитного поля взаимно перпендикулярны, сила Лоренца равна произведению модулей этих векторов, т.е.

$$F_{Л} = evB = e \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \cdot B_0 \cos \omega t. \quad (18)$$

Среднее по времени значение этой силы равно нулю, так как $\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$

Итак, в этом случае

$$\langle F_{Л} \rangle = 0. \quad (19)$$

3.3 При наличии силы сопротивления уравнение движение электрона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t - \beta v. \quad (20)$$

Используя подсказку, запишем

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (21)$$

Ускорение электрона находим, вычисляя производную от этой функции

$$a = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (22)$$

Подставим эти функции в уравнение (20)

$$-C_1 m \omega \sin \omega t + C_2 m \omega \cos \omega t = eE_0 \cos \omega t - C_1 \beta \cos \omega t - C_2 \beta \sin \omega t. \quad (23)$$

Так как это выражение должно быть справедливым в любой момент времени, можно приравнять коэффициенты, стоящие «при синусах и косинусах», в результате чего получаем систему уравнений для определения коэффициентов функции (21)

$$\begin{cases} -C_1 m \omega = -C_2 \beta \\ C_2 m \omega = eE_0 - C_1 \beta \end{cases} \quad (24)$$

Решение этой системы элементарно:

$$C_2 = eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2}; \quad C_1 = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (25)$$

Подставляя эти выражение в функцию (21), получим искомую функцию

$$v(t) = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t. \quad (26)$$

3.4 Так как в выражении для скорости присутствует слагаемое изменяющееся по закону косинуса, среднее значение силы Лоренца, действующее на один электрон, оказывается отличным от нуля. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle F_{\perp}^{(1)} \rangle &= \langle evB \rangle = \left\langle e \left(eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right) B_0 \cos \omega t \right\rangle = \\ &= e^2 \frac{E_0 B_0}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = e^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Легко показать, что эта сила направлена по направлению распространения волны.

3.5 Так как в пластинке содержится $N = nhS$ электронов, то суммарная средняя сила, действующая на пластинку оказывается равной

$$\langle F_{\perp} \rangle = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (28)$$

3.6 Поглощение волны происходит только потому, что на электроны действует тормозящая сила (равносильно – потому, что есть электрическое сопротивление). Мощность поглощенной одним электроном энергии есть мощность силы сопротивления

$$p^{(1)} = F_{\text{сопр}} v = \beta v^2 \quad (29)$$

Проводя усреднение по времени, получим

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle &= \langle \beta v^2 \rangle = \left\langle \beta \left(eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (28)$$

При выводе учтено, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = 0$

Мощность энергии, поглощенной всеми электронами равна

$$P_{\text{погл}} = N \langle p_1 \rangle = nhS \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (29)$$

Мощность энергии, падающей на пластинку равна

$$P_{\text{пад}} = IS = I = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S. \quad (30)$$

Следовательно, коэффициент поглощения волны равен

$$K = \frac{P_{\text{погл}}}{P_{\text{пад}}} = \frac{nh e^2}{c \epsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (31)$$

3.7 Давление света равно отношению силы (28) к площади пластинки

$$p = \frac{\langle F_{\perp}^{(1)} \rangle}{S} = nh e^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (32)$$

Поэтому осталось выразить эту формулу через интенсивность падающей волны и коэффициент поглощения, что делается достаточно просто: просто переставим слагаемые в формуле (28)

$$p = \frac{\langle F_{\perp}^{(1)} \rangle}{S} = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = \left(\frac{nhSe^2}{c \epsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c \right) \frac{1}{c} = K \frac{I}{c}. \quad (33)$$

Заметим, что в точности такое же выражение для давления света следует и из квантовой теории.