

## Решение задач. 11 класс

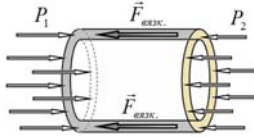
### Задача 11-1. Гидроатмосферный подъемник

#### 1. Введение.

1.1 Так расход жидкости постоянен, то любая порция жидкости движется без ускорения, следовательно, сумма сил действующих на любую выбранную часть жидкости, равна нулю.

Применяя эти рассуждения к жидкости в зазоре, можем утверждать, что разность сил давления (действующих на торцы жидкости) уравновешивается силами вязкого трения, действующими со стороны стенок:

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк.}} \quad (1)$$



Разность давлений следует выразить через расход с помощью формулы (1), приведенной в условии задачи:

$$q = \frac{\pi R h^3}{6\eta l} \Delta P \Rightarrow \Delta P = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q, \quad (2)$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим формулу для суммарной силы вязкого трения, действующей на воду в зазоре:

$$F_{\text{вязк.}} = \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \quad (3)$$

1.2 По третьему закону Ньютона сила, действующая со стороны стенок на воду равна по модулю силе, действующей со стороны воды на стенку. Так как площади боковой поверхности цилиндра и стенок трубы в зазоре практически равны (т.к.  $h \ll R$ ), а сила вязкого трения пропорциональна площади соприкосновения, то сила вязкого трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, в два раза меньше силы, действующей на воду, поэтому

$$F_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \Delta P \cdot 2\pi R h = \pi R h \Delta P = \frac{6\eta l}{h^2} q. \quad (4)$$

1.3 Понятно, что разность сил давлений, действующих на торцы цилиндра, равна

$$F_0 = \pi R^2 \Delta P. \quad (5)$$

Следовательно, их отношение равно

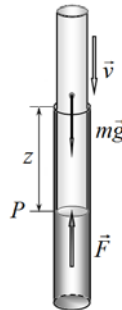
$$\frac{F_{\text{бок.}}}{F_0} = \frac{\pi R h \Delta P}{\pi R^2 \Delta P} = \frac{h}{R} \ll 1. \quad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации силами вязкого трения можно пренебречь, по сравнению с разностью сил давления. Правда, эта разность сил давления зависит от расхода жидкости.

#### Часть 2. Описание эффекта (пробирка в пробирке).

2.1 При опускании пробирки на нее действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и сила давления жидкости на дно пробирки  $F = \pi R^2 \Delta P$ . Как было показано ранее, в подобной ситуации можно пренебречь силой вязкого трения. Здесь ради укорочения формулой мы обозначили  $\Delta P$  - разность между давлением жидкости на глубине  $z$  и атмосферным давлением. Поэтому уравнение движения пробирки в квазистационарном приближении имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (7)$$



Отметим, что для величины  $\Delta P$  нельзя использовать формулу для гидростатического давления, так жидкость в зазоре движется. Поэтому для нахождения этого давления запишем уравнение второго закона Ньютона для жидкости в зазоре (опять в квазистационарном приближении):

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = \rho(2\pi R h z)g + F_{\text{вязк.}} \quad (8)$$

Смысл которого очевиден: разность сил давления уравновешивается силами тяжести и вязкого трения, действующими на воду в зазоре. Для силы вязкого трения справедлива полученная ранее формула (3). С ее учетом, получим

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = \rho(2\pi R h z)g + \frac{12\eta z}{h^2} q \Rightarrow \Delta P = \rho g z + \frac{6\eta}{\pi R h^3} z q \quad (9)$$

Расход воды, протекающей через зазор можно выразить через скорость движения пробирки (вся жидкость, вытесненная пробиркой, должна протечь через зазор):  $q = \pi R^2 v$ . Подставляя эти выражения в уравнение (7) получим

$$mg = \pi R^2 \left( \rho g z + \frac{6\eta z}{\pi R h^3} \pi R^2 v \right) = \pi R^2 \rho g z + \frac{6\pi \eta R^3}{h^3} z v. \quad (10)$$

Движение пробирки прекратится, когда скорость станет равной нулю, соответствующая максимальная глубина погружения определяется формулой:

$$z_{\text{max}} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}. \quad (11)$$

Зависимость скорости от координаты  $z$  можно выразить из уравнения (10)

$$v = \frac{mg - \pi R^2 \rho g z}{\frac{6\pi \eta R^3}{h^3} z} = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z_{\text{max}} - z}{z} \quad (12)$$

Обозначим коэффициент в этой формуле (он имеет размерность скорости)  $\frac{\rho g h^3}{6\eta R} = v_0$ ,

тогда зависимость (12) приобретает вид

$$v = v_0 \frac{z_{\text{max}} - z}{z}. \quad (13)$$

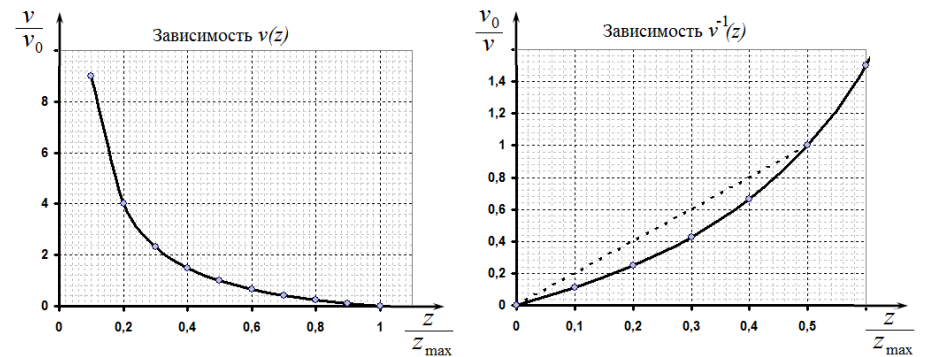


График этой функции показан на рисунке.

Для оценки времени движения в указанном диапазоне можно построить график обратной зависимости  $v^{-1}(z)$  (см. рис.), тогда площадь под этим графиком численно равна времени движения, т.к.  $\Delta t = \frac{\Delta z}{v}$ . Для оценки площади плавную кривую можно заменить отрезком

прямой. На построенном графике в относительных единицах эта площадь равна 0,25. Переход к обычным единицам приводит к результату

$$\tau \approx 0,25 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,25 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (14)$$

Замечания.

1. Формула (11) может быть получена непосредственно из условия равновесия в пробирке (когда справедливы законы статики) – сила тяжести пробирки уравновешивается силой Архимеда.
2. Точное значение времени движения может быть вычислено путем строгого интегрирования. Рассчитанное значение площади под кривой равно 0,2. Иными словами допущенная погрешность составляет величину порядка 20%.
3. Формально в рассмотренном квазистационарном приближении пробирка стартует с бесконечно большой скоростью. Это связано с тем, что в начальном положении пробирки отсутствует сила вязкого трения. Однако на конечный результат, это обстоятельство не играет существенной роли.

2.2 Описание движения пробирки в перевернутом положении проводится аналогично проведенному в п. 2.2.

Уравнение движения пробирки имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (15)$$

здесь  $\Delta P$  - разность между атмосферным давлением и давлением воды на высоте  $z$  (которое меньше атмосферного).

Закон движение воды в зазоре

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк.}} \quad (16)$$

Для силы вязкого трения, по-прежнему, справедлива формула (3), поэтому разность давлений в этом случае оказывается равным

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \Rightarrow \Delta P = \rho g z - \frac{6\eta R}{h^3} z v \quad (17)$$

А уравнение движения пробирки

$$mg = \pi R^2 \rho g z - \frac{6\pi\eta R^3}{h^3} z v. \quad (18)$$

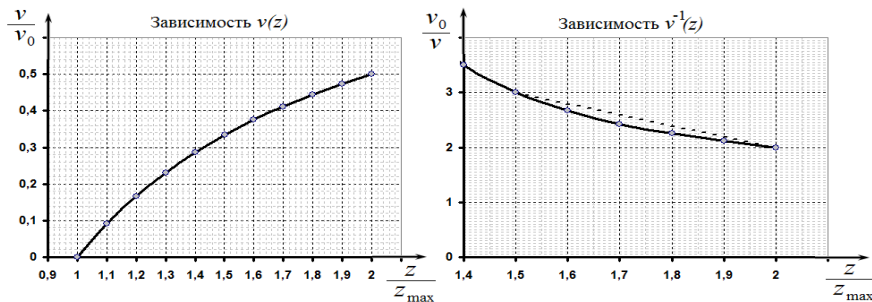
Из этого уравнения следует, что минимальная высота подъема пробирки, при которой начнется ее движение вверх, равна

$$z_{\min} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}, \quad (19)$$

что совпадает с максимальной глубиной погружения, полученной ранее. Зависимость скорости подъема имеет вид

$$v = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z - z_{\min}}{z}. \quad (20)$$

Отметим, что в данном случае формула имеет смысл при  $z > z_{\min}$ .



Графики этой зависимости и обратной ей  $v^{-1}(z)$  показаны на рисунках.

Оценка времени движения в указанном диапазоне (проведенная по линейной аппроксимации зависимости  $v^{-1}(z)$ ) равна

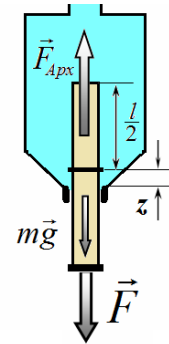
$$\tau \approx 0,75 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,75 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (21)$$

3.1 Так как пробирка начинает подниматься при высоте ее погружения равной  $l/4$ , то при этом положении сила Архимеда равна силе тяжести:

$$\rho g S \frac{l}{4} = mg \Rightarrow m = \frac{1}{4} \rho S l. \quad (22)$$

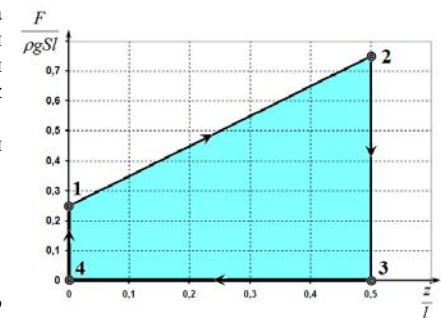
3.2 Так как процесс подъема можно считать квазистационарным, то при любом положении пробирки она находится в равновесии, условие которого имеет вид (с учетом формулы (22)):

$$\rho g S \left( \frac{l}{2} + z \right) = mg + F \Rightarrow F = \rho g S l \left( \frac{z}{l} + \frac{1}{4} \right) \quad (23)$$



После того, как пробирка поднялась до максимальной высоты, внешнее устройство отключается, поэтому внешняя сила падает до

- $F = 0$ . Так как вода наливается из резервуара быстро, то можно пренебречь просачиванием воды из бутылки за время ее опускания. Эти рассуждения позволяют построить график рассматриваемого циклического процесса:
- 1 → 2: подъем пробирки, описываемый уравнением (23);
  - 2 → 3: отключение внешнего устройства;
  - 3 → 4: опускание пробирки;
  - 4 → 1: подключение внешнего устройства.



3.3 Из построенного графика следует, что работа совершенная подъемником равна

$$A = \frac{1}{4} \rho g S l^2 \quad (24)$$

3.4 Подъемник совершает полезную работу за счет того, что вода выливается через зазор между пробиркой и горлышком бутылки. Объем вытекшей за цикл воды равен половине объема пробирки, т.е.  $\frac{1}{2} S l$ . Чтобы подъемник работал необходимо, чтобы уровень воды в бутылке превышал длину пробирки  $l$ . Поэтому минимальная высота, с которой должна выливаться вода также равна  $l$ . Следовательно, изменение ее потенциальной энергии равно  $\Delta U = \frac{1}{2} \rho g S l^2$ . Разумно определить КПД как отношение полезной работы к

затраченной энергии. В этом случае КПД оказывается равным  $\eta = \frac{A}{\Delta U} = 50\%$ .

**Задача 11-2. Перераспределение зарядов.**

5.2 К сожалению, задачи с равномерно распределенными по объему электрическими зарядами являются искусственными, потому, что не известно, как реально создать такие системы. Поэтому рассмотрим более реальную систему и проанализируем динамику изменения распределения зарядов.

Уточним характеристики рассматриваемой пластины: пластина является слабо проводящей с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$  (не путайте с объемной плотностью зарядов!), концентрация свободных электронов (заряд электрона  $e$ ) внутри этой пластины равна  $\bar{n}$ .

5.2.1 Под действием электрического поля напряженности  $\vec{E}$  электроны внутри проводника движутся со средними скоростями

$$\vec{v} = \beta \vec{E} \quad (2)$$

где величина  $\beta$  называется подвижностью электронов. Выразите подвижность электронов внутри данной пластины, через ее характеристики  $\rho, \bar{n}$ .

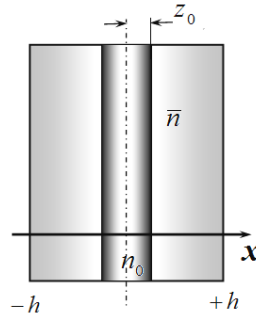
Пусть внутри рассмотренной в п. 5.1 возник тонкий слой толщиной  $2z_0$ , в котором создана избыточная концентрация электронов  $n_0$  (например, с помощью электронной пушки). С течением времени эта область избыточного заряда будет расплываться.

5.2.2 С какой скоростью будет двигаться граница области  $z < z_0$  избыточной концентрации электронов?

5.2.3 Найдите зависимость избыточной концентрации электронов  $n(x)$  от координаты  $x$  в разные моменты времени. Постройте схематические графики этой зависимости для нескольких (наиболее характерных времен), укажите параметры этих зависимостей.

5.2.4 Нарисуйте схематический графики зависимости потенциала  $\varphi(x)$  для тех же моментов времени, какие вы рассмотрели в п.5.2.3.

5.2.5 Оцените время, за которое все избыточные электроны окажутся на поверхности пластины.



1 Рассмотрим величину плотности тока внутри пластины. С одной стороны она определяется законом Ома (в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (1)$$

С другой стороны плотность тока можно выразить через концентрацию свободных электронов и их среднюю скорость

$$\vec{j} = e\bar{n}\vec{v}. \quad (2)$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$\vec{v} = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \vec{E}. \quad (3)$$

Таким образом, подвижность электронов равна

$$\beta = \frac{1}{e\bar{n}\rho}. \quad (4)$$

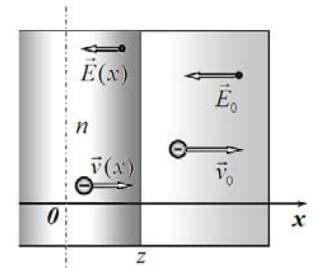
Для дальнейшего решения задачи необходимо рассмотреть две стадии процесса: первая – область избыточной концентрации не достигла поверхности пластины; вторая – после того, как первые электроны достигли поверхности пластины.

2 Итак, пусть область избыточной концентрации распространилась на расстояние  $z < h$  (рис.). Вне этой области  $x > z$  напряженность поля остается неизменной и равной

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Действительно, она определяется зарядом, который находится на расстоянии от центра меньшим чем  $x$ , то есть всеми избыточными электронами.

Поэтому в этой области скорости всех свободных (собственных) электронов, следовательно, плотность тока будут одинаковыми во всех точках. Поэтому в этой области избыточных зарядов возникать не будет. Кроме того, заряды, накапливающиеся на сторонах пластины, не влияют на поле внутри нее, поэтому при описании движения избыточных электронов свободные электроны можно не принимать во внимание.



Предположим (и это является основой дальнейшего описания!), что в процессе перераспределения на избыточных электронах их концентрация  $n$  одинакова во всех точках области  $|x| < z$  (но изменяется с течением времени). Тогда, как было показано ранее, напряженность электрического поля будет зависеть от координаты по закону

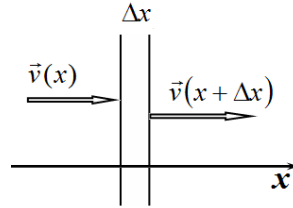
$$E(x) = \frac{nex}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Аналогично будет изменяться и скорость электронов

$$v(x) = \beta E(x) = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \frac{nex}{\epsilon_0} = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho\epsilon_0} x. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь тонкий слой толщиной  $\Delta x$ , находящийся внутри рассматриваемой области. Изменение концентрации в этом слое описывается уравнением (смысл которого – разность между пришедшими и ушедшими электронами)

$$\Delta n = \frac{nv(x) - nv(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta t = -\frac{n^2}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} \Delta t. \quad (7)$$



Важно отметить, что во всех точках концентрация изменяется одинаково, поэтому если в начальный момент времени распределение избыточных электронов было однородным, то оно и будет оставаться однородным и далее! **Что доказывает сделанное предположение!**

Понятно, что скорость движения границы определяется скоростью электронов, которые расположены на этой границе, поэтому

$$v_z = v(z) = \beta E(x) = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} z = \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} \quad (7)$$

Как следует из этого выражения, скорость движения границы не зависит от времени.

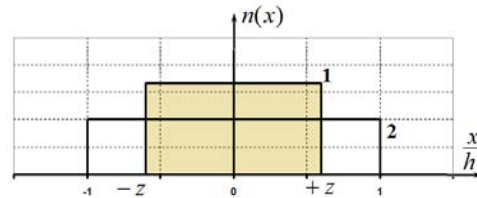
3. Таким образом, мы показали, что распределение избыточных электронов внутри области  $|x| < z$  является однородным. Так как общее число избыточных электронов остается постоянным, то эта концентрация определяется очевидной формулой

$$n(t) = \frac{n_0 z_0}{z(t)} = \frac{n_0 z_0}{z_0 + \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t} = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t}. \quad (9)$$

В области  $|x| > 0$  концентрация избыточных электронов равна нулю. Отметим, что функция (9) также является решением дифференциального уравнения (7)

Теперь обсудим поведение избыточных электронов после того, как граница области их расположения достигла краев пластины. Как уже было отмечено, заряды на сторонах пластины не влияют на поле внутри, поэтому изменение концентрации электронов будет определяться, по-прежнему, формулой (8). Однако, на этом этапе часть электронов окажется на сторонах пластины, так, что суммарное число избыточных электронов внутри пластины будет уменьшаться.

Графики зависимости распределения  $n(x)$  представляют собой прямоугольники 1- граница области избыточных электронов не достигла сторон пластины; 2- после того, часть избыточных электронов оказалась на границе.



4. Прежде всего, рассмотрим распределение модуля напряженности электрического поля. Вне области расположения избыточных зарядов напряженность поля постоянна и равна

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}.$$

В области с равномерно распределенным зарядом напряженность поля линейно возрастает от нуля до  $E_0$ . Следовательно, зависимость напряженности поля от координаты  $x$  имеет вид

$$E = E_0 \frac{x}{z}. \quad (10)$$

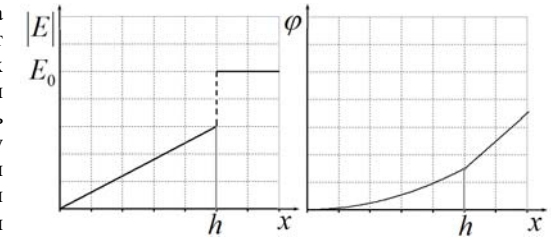
График этой зависимости имеют вид показанный на рисунке (так как распределение зарядов симметрично относительно начала координат, то достаточно рассмотреть область  $x > 0$ ). Примем потенциал в центре пластины равным нулю. Учитывая связь между разностью потенциалов и напряженностью  $\Delta \varphi = -E \Delta x$ , можем определить потенциал в произвольной точке, как площадь под графиком зависимости  $|E(x)|$  – не забываете, что электроны имеют отрицательный заряд. Следовательно, в области избыточных электронов  $x < z$  потенциал возрастает квадратично

$$\varphi(x) = E_0 \frac{x^2}{2z} \quad (11)$$

А вне этой области возрастает по линейному закону

$$\varphi(x) = E_0 \frac{z}{2} + E_0 (x - z) = E_0 \left( x - \frac{z}{2} \right) \quad (12)$$

«разбегания зарядов» Несколько иная картина будет в том случае, когда избыточные заряды начнут накапливаться на сторонах пластины. Напряженность поля внутри пластины будет нарастать медленнее, поэтому непосредственно у края напряженность будет меньше, чем  $E_0$ . Затем благодаря накопившимся поверхностным зарядам, при переходе через край пластины испытывать скачок до значения  $E_0$ . Зависимость потенциала от координаты в этой точке будет иметь излом.



5. Зависимость концентрации от времени определяется функцией (9), поэтому, строго говоря, время «разбегания» зарядов равно бесконечности. Однако, всегда можно ввести некое характерное время. Например, можно найти время в течение которого, концентрация убывает в 2 раза (своеобразный «период полураспада»). Полагая в формуле (9)  $n = \frac{n_0}{2}$ , находим

$$T_{1/2} = \frac{\bar{n} \rho \epsilon_0}{n_0} \quad (13)$$

Интересно отметить, что найденное время зависит от начальной концентрации избыточных электронов. Такой результат типичен, если распад не является линейным.

**Задача 11-3. Вода из воздуха**

1. Так как давление насыщенного пара зависит от температуры, то при изобарном охлаждении температура водяного пара может достичь точки, когда пар при постоянном начальном давлении  $\varphi p_{n1}$  уже станет насыщенным. Проводя горизонтальную прямую изобары  $p = \varphi p_{n1} = 1,81$  кПа на графике бланка-вкладыша, найдем искомую температуру  $T_B = 16^\circ\text{C} = 289$  К.

Стоит отметить, что при охлаждении ниже найденной температуры давление водяного пара уже перестанет быть постоянным. В случае достаточно медленного процесса оно будет соответствовать давлению насыщенного пара при текущей температуре газа, как максимально возможному. С другой стороны процесс для всего воздуха в сосуде, давление которого гораздо больше, чем пара, процесс будет протекать по обычной схеме изобарного охлаждения.

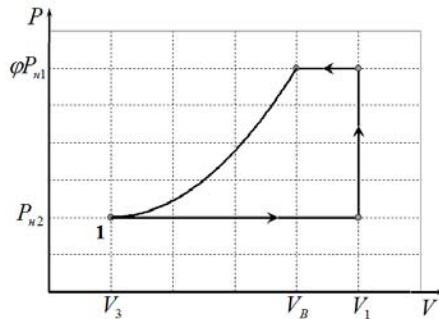
2. Так как минимальная температура холодильной установки Феда ниже  $T_B$ , то пар действительно начнет конденсироваться. Массу образовавшейся воды можно рассчитать аналогично пункту А3, найдя химическое количество водяного пара до ( $v_1$ ) и после ( $v_3$ ) охлаждения при помощи уравнения Менделеева-Клапейрона. Для подобного расчета необходимо найти давление насыщенного водяного пара в конце охлаждения (при температуре  $T_2 = 4,0^\circ\text{C}$ ) из графика на бланке-вкладыше:  $p_{n2} \approx 0,80$  кПа. Кроме того, необходимо получить выражение для расчета конечного объема водяного пара  $V_3$ , равного объему всего воздуха в сосуде. Для этого запишем уравнение, соответствующее изобарному охлаждению воздуха:  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_2}$ . Тогда массу образовавшейся воды можно найти следующим образом:

$$m_2 = M(v_1 - v_2) = M \left( \frac{\varphi p_{n1} V_1}{RT_1} - \frac{p_{n2} V_2}{RT_2} \right) = \frac{M}{R} \left( \varphi p_{n1} \frac{V_1}{T_1} - p_{n2} \frac{V_2}{T_2} \right) = \frac{M V_1}{R T_1} (\varphi p_{n1} - p_{n2})$$

$$m_2 = 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 3,73 \text{ мг}$$

3. стакан воды можно насобирать за  $N_2 = m_2/m_3 = 3360$  охладжений.

4. От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изобарному процессу и представляет собой участок горизонтальной прямой. Далее в ходе процесса конденсации давление водяного пара будет уменьшаться. Так как в ходе изобарного охлаждения объем и давление прямо пропорциональны друг другу, то характер уменьшения давления с объемом аналогичен поведению графика давления от температуры на бланке-вкладыше. Обратный нагрев после сбора влаги будет снова проходить при постоянном давлении – ему так же соответствует участок горизонтальной прямой до первоначального объема. Наконец, при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке .



5. Для подсчета полной работы, совершаемой над содержимым сосуда, надо найти площадь, ограниченную построенной в предыдущем пункте диаграммой. Для грубой оценки заменим криволинейный участок на прямую и найдем площадь получившейся трапеции ABCD. Нам будут необходимы значения объемов в характерных точках на графике, которые можно найти, используя выражения для изобарного процесса с воздухом в сосуде:

$$V_B = V_1 \frac{T_B}{T_1} = 4,93 \text{ л}, \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 4,73 \text{ л}$$

Тогда полная работа, примерно равная площади трапеции ABCD, будет:

$$A_B \approx S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) AD = \frac{1}{2} ((V_1 - V_B) + (V_1 - V_2)) (\varphi p_{n1} - p_{n2}) = 0,172 \text{ Дж}$$

В6. Для данного процесса удельная работа конденсации получается:

$$Q_2 = A_B/m_2 = 4,61 \text{ кДж/кг}$$

