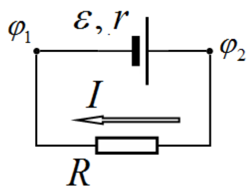
Решение. 10 Класс
Задание 10-1. Разминка

Задача 1. Кольцевая ЭДС

1.1.1 По закону Ома для полной цепи сила тока в этой цепи равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}. \qquad (1)$$



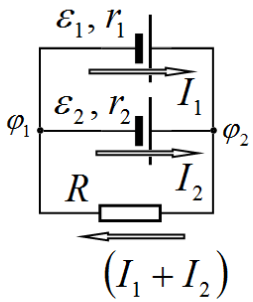
Следовательно, искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = IR = \varepsilon\frac{R}{R+r}. \qquad (2)$$

1.1.2 Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon\frac{R}{R+r} = \varepsilon\frac{R+r-r}{R+r} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R+r}r = \varepsilon - Ir. \qquad (3)$$

Впрочем, это соотношение можно записать сразу, сославшись на закон для участка цепи с активным элементом.



1.2.1 Используя соотношение (2) и закон Ома для участка цепи, запишем систему уравнений для сил токов в различных ветвях рассматриваемой цепи

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases}. \qquad (4)$$

Решение этой системы дает искомый результат

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1}{r_1} - I_1 = (I_1 + I_2)\dfrac{R}{r_1} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} - I_1 = (I_1 + I_2)\dfrac{R}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \qquad (5)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} - (I_1 + I_2) = (I_1 + I_2)\left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) \Rightarrow I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)}$$

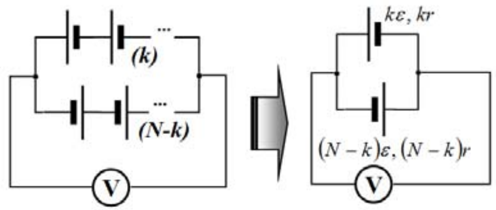
1.2.2 Последнее соотношение можно переписать в виде

$$I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)^{-1} + R}, \qquad (6)$$

который совпадает с законом Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon_0}{R + r_0}$. Следовательно, во-первых, два параллельно соединенных источника можно заменить одним, во-вторых, характеристики этого источника описываются не очевидными формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}; \\ r_0 &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}. \qquad (7)$$

1.3 При подключении вольтметра к нулевой и k- точкой эквивалентная схема выглядит, как показано на рисунке. Здесь учтено, что при последовательном соединении источников их ЭДС и внутренние сопротивления складываются.



Для расчета напряжения можно воспользоваться полученной формулой (6), в которой следует положить $\varepsilon_1 = k\varepsilon$, $\varepsilon_2 = -(N-k)\varepsilon$, $r_1 = kr$, $r_2 = (N-k)r$. Подстановка этих значений приводит к результату – сила тока через вольтметр, а следовательно и напряжение на нем равно нулю!

Этот же результат следует и из закона (3), так сила тока в цепи равна $I = \dfrac{N\varepsilon}{Nr} = \dfrac{\varepsilon}{r}$, поэтому при любом подключении $\Delta\varphi = k\varepsilon - Ikr = 0$.

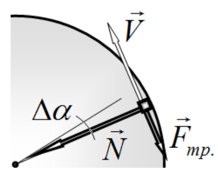
Задача 2. Шайба

Изменение скорости шайбы обусловлено силой трения о борт. При движении вдоль прямолинейных бортов отсутствует сила, прижимающая шайбу к борту, поэтому в этом случае трение отсутствует, и скорость шайбы остается постоянной. При движении вдоль закругления появляется сила реакции, действующая на шайбу и сообщающая ей центростремительное ускорение. Изменение модуля скорости шайбы описывается уравнением 2 закона Ньютона в проекции на направление скорости шайбы

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_{mp.}. \qquad (1)$$

Сила трения связана с силой реакции законом Кулона – Амонтона

$$F_{mp.} = \mu N. \qquad (2)$$



Наконец, сила реакции может быть выражена через центростремительное ускорение

$$\frac{mV^2}{R} = N. \qquad (3)$$

Здесь R - радиус закругления.
Таким образом, изменение модуля скорости описывается уравнением

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu\frac{mV^2}{R}. \qquad (4)$$

Так как нас не интересует зависимость скорости от времени, прейдем в этом уравнении к зависимости изменения скорости от угла поворота. Пусть за малый промежуток времени Δt

шайба прошла путь $\Delta S = V\Delta t$ и при этом повернула на малый угол $\Delta\alpha$. Эти величины связаны геометрическим соотношением

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R} = \frac{V\Delta t}{R}. \qquad (5)$$

С учетом этого выражение, уравнение (4) принимает вид

$$\Delta V = -\mu V \frac{V\Delta t}{R} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\mu V \Delta\alpha. \qquad (6)$$

Из этого уравнения следует, что относительное изменение скорости шайбы пропорционально углу поворота

$$\frac{\Delta V}{V} = -\mu\Delta\alpha \qquad (7)$$

Следовательно, при повороте на некоторый угол α модуль скорости уменьшается в одно и тоже число раз. Так как прохождение каждого закругления соответствует повороту на один и тот же угол $90°$, то и уменьшение скорости на каждом закруглении также будет в одно и то же число раз, то есть

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1}. \qquad (8)$$

Из этого выражение определяем искомую конечную скорость

$$V_2 = \frac{V_1^2}{V_0}. \qquad (9)$$

Дополнение.

1. Проведенные рассуждения можно проиллюстрировать и математическими выкладками. Разобьем угол поворота α на малые интервалы $\Delta\alpha$. Тогда из уравнения (7) следует, что скорости после прохождения k и $(k-1)$ интервалов связаны соотношением

$$V_k = V_{k-1}(1-\mu\Delta\alpha). \qquad (10).$$

То есть последовательность V_k является геометрической прогрессией, поэтому каждый член этой последовательности выражается в явном виде следующим образом

$$V_k = V_0(1-\mu\Delta\alpha)^k. \qquad (11)$$

Если выразить число шагов, как $k = \dfrac{\alpha}{\Delta\alpha}$, то выражение (11) можно переписать в виде

$$V_k = V_0(1-\mu\Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}} = V_0 \exp(-\mu\alpha). \qquad (12)$$

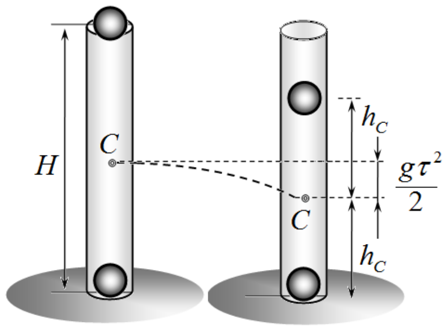
Здесь на последнем шаге использован замечательный предел. Его можно «доказать» следующим образом. Если при малых x справедливо выражение $\exp(x) \approx 1 + x$, то справедливо и обратное $1 + x \approx \exp(x)$. Поэтому $(1+x)^\beta \approx \exp(\beta x)$, откуда и следует формула (12).

Наконец, можно просто проинтегрировать уравнение (7):

$$\frac{dV}{V} = -\mu d\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -\mu\int_0^\alpha d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{V}{V_0} = -\mu\alpha \quad \Rightarrow \quad V = V_0 \exp(-\mu\alpha)$$

Обратим внимание, что данная формула совпадает с формулой Эйлера, описывающей изменение силы натяжения нити переброшенной через цилиндр.

Задача 3. Шарики в трубе



Силы взаимодействия между шариками (как электростатические, так и упругие в момент столкновения) являются внутренними для системы двух шариков, поэтому они влияют на движение центра масс шариков. Следовательно, центр масс шариков движется вниз с ускорением свободного падения, независимо от того, до столкновения, после столкновения…

Так как массы шариков одинаковы, то центр масс C находится на середине отрезка их соединяющего.

За время τ центр масс двух шариков опустится на расстояние $\dfrac{g\tau^2}{2}$ и окажется на высоте

$$h_C = \frac{H}{2} - \frac{g\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь $\dfrac{H}{2}$ - высота центра масс в начальный момент времени (в момент отпускания).

Так как нижний шарик в это момент оказался на дне сосуда, то второй шарик окажется на высоте в 2 раза большей высоты центра масс, т.е.

$$h_1 = 2h_C = H - g\tau^2. \qquad (2)$$

Примечание. Исходные данные позволяют заключить, что в рассматриваемый момент времени второй шарик будет находиться выше.

Задача 2 Теплопроводность

1.1 Для расчетов потоков теплоты надо просто подставить численные значения в заданную формулу и провести расчет

Для серебра

$$q_{Ag} = \lambda S\frac{\Delta T}{h} = 8{,}58\cdot 10^4\ Вт \qquad (1)$$

Для свинца

$$q_{Зи} = \lambda S\frac{\Delta T}{h} = 7{,}02\cdot 10^3\ Вт \qquad (2)$$

1.2 Так как коэффициент теплопроводности постоянен в установившемся режиме температуру изменяется по линейному законы. Поэтому при расчетах можно считать, что среднее значение изменения температуры равно $\delta T = \dfrac{1}{2}\Delta T$. После этого опять считаем

Для серебра

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2}cm\Delta t = \frac{1}{2}c\rho Sh\Delta t = 2{,}47\cdot 10^6\ Дж \qquad (3)$$

Для свинца

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2}c\rho Sh\Delta t = 1{,}43\cdot 10^6\ Дж \qquad (4)$$

1.3 Для решения этого пункта воспользуемся упорно навязываемой аналогией с законами постоянного тока. Так для каждой пластины можно ввести и рассчитать тепловое сопротивление

$$R = \frac{1}{\lambda}\frac{h}{S} \tag{5}$$

Так как пластины соединены последовательно (теплота проходит через одну, потом через другую), то общее сопротивление равно сумме сопротивлений. Поэтому поток теплоты через сдвоенные пластины будет равен

$$q_1 = q_2 = \frac{\Delta T}{\dfrac{h}{\lambda_{Ag}S} + \dfrac{h}{\lambda_{Pb}S}} \tag{6}$$

Этой формуле можно придать интересный вид

$$q_1 = q_2 = \left(\frac{1}{q_{Ag}} + \frac{1}{q_{Pb}}\right)^{-1} \tag{7}$$

Расчеты по этой формуле дают значение

$$q_1 = q_2 = 6{,}49 \cdot 10^3\ Вт \tag{8}$$

Как видно поток определяется потоком через плохо проводящий слой.

Для расчета количества теплоты, потраченное на нагревание необходимо сначала найти распределение температуры, т.е. решить следующие пункты задачи.

1-4 – 1.6 Распределение температуры в каждом слое, по-прежнему, линейное. Поэтому достаточно найти температуру стыка. Опять воспользуемся аналогией с протеканием электрического тока. Обозначим свойства вещества примыкающего к холодной стороне индексом «х», а к горячей стороне индексом «г». Тогда можно записать (здесь T_z - температура стыка):

$$T_z - T_0 = qR_x = \frac{\Delta T}{\dfrac{h}{\lambda_{Ag}S} + \dfrac{h}{\lambda_{Pb}S}} \cdot \frac{h}{\lambda_x S} = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_x} + \dfrac{1}{\lambda_г}}\frac{1}{\lambda_x} \tag{9}$$

Откуда следует, что

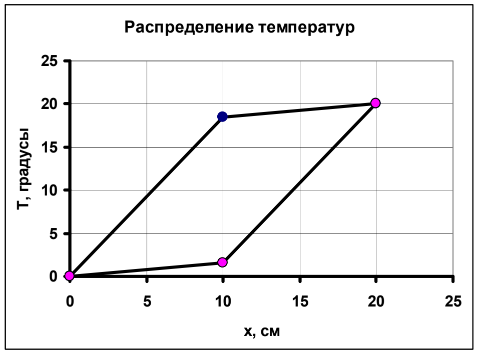
$$T_z = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_x} + \dfrac{1}{\lambda_г}}\frac{1}{\lambda_x} \tag{10}$$

Проведем расчеты.
В первом случае ($Pb \to Ag$)

$$T_{z1} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_{Ag}} + \dfrac{1}{\lambda_{Pb}}}\frac{1}{\lambda_{Pb}} = 18{,}5°C\,. \tag{11}$$

Во втором случае ($Ag \to Pb$)

$$T_{z2} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{\lambda_{Ag}} + \dfrac{1}{\lambda_{Pb}}}\frac{1}{\lambda_{Ag}} = 1{,}5°C\,. \tag{12}$$



Во втором случае можно было просто вычислить $T_{z2} = \Delta T - T_{z1}$. Графики зависимостей температуры от координаты показаны на рисунке.
Видно, что основное «падение

температуры» происходит на свинцовой пластине. Также по графику видно, что основное различие в количестве теплоты возникает из-за того, что серебряная пластина в первом случае нагревается больше.
Для расчетов теплот учтем, что пластина, примыкающая к холодной стороне, в среднем нагрелась на $\frac{1}{2}T_Z$; а вторая - на величину $\frac{1}{2}(T_z + T_1)$.
Поэтому количество теплоты, которой пойдет на нагревания будет равно:
В первом случае ($Pb \to Ag$):

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}ShT_Z + \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}Sh(T_Z + T_1) = 6{,}07 \cdot 10^6\ Дж \tag{13}$$

Во втором случае ($Ag \to Pb$)

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}ShT_Z + \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}Sh(T_Z + T_1) = 1{,}73 \cdot 10^6\ Дж\,. \tag{14}$$

Часть 2. Воздушная пластина.

В данной части задачи все температуры следует рассчитывать в шкале Кельвина.
2.1 Для определения вида зависимости длины свободного пробега от указанных параметров, заметим, что движущаяся молекула заметает на своем пути площадь равную πd^2. На длине свободно пробега в цилиндре с указной площадью поперечного сечения и высотой равной длине свободного пробега в среднем должна находиться одна молекула. Поэтому можно записать

$$\pi d^2 \langle l \rangle n = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle l \rangle = \frac{1}{\pi d^2 n}\,. \tag{15}$$

2.2 Подставляя найденную зависимость в формулу для теплопроводности, получим выражение

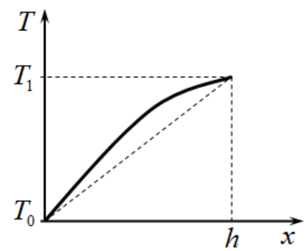
$$\lambda = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle \rho c_V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 n} \cdot nm \cdot C_V M\,. \tag{16}$$

Из которого следует, что коэффициент теплопроводности воздуха пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры. Т.е. показатель степени $z = \frac{1}{2}$. Важно также отметить, что теплопроводность не зависит от плотности (концентрации).

Экспериментальные данные показывают, что при температурах близких к комнатным показатель степени ближе к единице. Поэтому выбранная модель также имеет право на существование.

2.3 Используя формулу для потока теплоты, получаем, что поток теплоты через воздушную прослойку (в приближении постоянства теплопроводности) равен

$$\tilde{q}_a = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 4{,}80\,Вт \tag{17}$$



2.4 Так как теплопроводность воздуха возрастает с ростом температуры, то график температурного профиля будет выгнут вверх. Действительно, в тех местах, где теплопроводность больше, градиент температуры меньше.

2.5 Так как теплопроводность воздуха зависит от температуры, то она изменяется и при переходе от одной точки к другой. Поэтому закон теплопроводности Фурье следует записывать только для тонких слоев (т.е. в дифференциальной форме). Выразим зависимость теплопроводности от температуры посредством формулы

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0}. \tag{18}$$

И запишем уравнение Фурье для тонкого слоя воздуха Δx :

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S. \tag{19}$$

Воспользуемся очевидной подсказкой и запишем

$$q\Delta x = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} \Delta\left(T^2\right) \tag{20}$$

Теперь легко просуммировать по всем слоям:

$$ql = \frac{\lambda_0 S}{2T_0}\left(T_1^2 - T_0^2\right) \tag{21}$$

Откуда получаем окончательно для потока теплоты

$$q = \frac{\lambda_0 S}{2T_0 l}\left(T_1^2 - T_0^2\right). \tag{22}$$

Расчет дает следующее численное значение: $q_a = 4{,}98 Bm$, что несколько больше, чем получено ранее в приближенном расчете.

2.6 Так как объем воздуха не изменяется, то все полученная теплота пойдет на увеличение внутренней энергии воздуха. В установившемся режиме теплопередачи температура будет изменяться от точки к точке, постоянным будет оставаться давление! Поэтому выразим внутреннюю энергию воздуха через его давление:

$$U = \frac{5}{2} R\nu T = \frac{5}{2} PV. \tag{23}$$

Следовательно, изменение внутренней энергии воздуха (и равное ему количество полученной теплоты) выражается через изменение давления

$$Q = \Delta U = \frac{5}{3} V\Delta P. \tag{24}$$

Таким образом, нам необходимо рассчитать установившееся давление. Для этого воспользуемся условием постоянства числа молекул воздуха. Для этого разобьем воздушную пластину на тонкие слои Δx_i. Концентрацию частиц в каждом слое можно выразить из уравнения состояние газа

$$n_i = \frac{P}{kT_i}. \tag{25}$$

Тогда общее число молекул можно получить, если просуммировать числа частиц во всех слоях

$$N = \sum_i \frac{PS}{kT_i} \Delta x_i. \tag{26}$$

Это же число можно выразить через начальные условия

$$N = \frac{P_0 S l}{kT_0}. \tag{27}$$

Таким образом, для определения давления получаем уравнение

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0 l}{T_0}. \tag{28}$$

Прямое вычисление суммы требует расчета распределения температуры и последующего интегрирования. Можно поступить проще: выразим Δx_i из уравнения теплопроводности (19):

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i = \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S \tag{29}$$

И после подстановки получим

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i} \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S = \frac{\lambda_0 S}{qT_0} \sum_i \Delta T_i = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\left(T_1 - T_0\right). \tag{30}$$

Подставим найденное выражение для потока теплоты (22)

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{\lambda_0 S}{qT_0}\left(T_1 - T_0\right) = \frac{\lambda_0 S}{\frac{\lambda_0 S}{2T_0 l}\left(T_1^2 - T_0^2\right) T_0}\left(T_1 - T_0\right) == \frac{2l}{\left(T_1 + T_0\right)}. \tag{31}$$

Теперь из уравнения (28) находим

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0} \tag{32}$$

Наконец, подставляем в формула для количества теплоты

$$Q = \frac{5}{2} V\Delta P = \frac{5}{2} P_0 V \left(\frac{T_1 + T_0}{2T_0} - 1\right) = \frac{5}{4} P_0 V \frac{\Delta T}{T_0} \tag{33}$$

Численное значение поглощенной теплоты равно $Q = 915 Дж$.

Задача 3 Опыты Ш. Кулона (Решение)

1. Свойства нити подвеса.

1.1 В описании Ш. Кулона приведена масса нити m, она легко выражается через объем и плотность серебра

$$m = \rho_{Ag} L \frac{\pi d^2}{4}. \tag{1}$$

Из этой формулы легко выразить диаметр нити:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}}. \tag{2}$$

При численных расчетах следует все параметры выразить в единицах системы СИ:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 64{,}8 \cdot 10^{-6} кг}{\pi \cdot 10{,}5 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 28 \cdot 2{,}707 \cdot 10^{-2} м}} = 2{,}55 \cdot 10^{-5} м \tag{3}$$

Менее трех сотых миллиметра!

1.2 Модуль кручения определяется по формуле

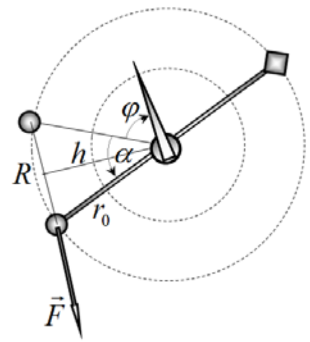
$$G = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fr}{\varphi}. \tag{4}$$

Подстановка численных значений с переводом в систему СИ дает следующее значение

$$G = \frac{Fr}{\varphi} = \frac{\frac{1}{340}\cdot 64{,}8\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}81 H\cdot 4\cdot 2{,}707\cdot 10^{-2}\, м}{2\pi} = 8{,}055\cdot 10^{-9}\, H\cdot м = 8{,}1\cdot 10^{-9}\, H\cdot м \qquad (5)$$

2. Фундаментальный закон электричества.

2.1 Решение этой части задачи начнем с цитаты из использованного мемуара: «*Расстояние между двумя шариками, когда они удалены друг от друга действием взаимного отталкивания, измеряется в точности не углом, который они образуют, а хордой дуги, которая соединяет их центры. Так же и плечо в крайнем положении, где проявляется действие, измеряется не половиной длины дуги, или радиусом, а косинусом половины угла…*»



Воспользуемся подсказкой самого Шарля Кулона, рассмотрим условия равновесия коромысла крутильных весов. На рисунке показана геометрия опыта и направление силы взаимодействия между шариками $\vec{F}$. Из рисунка следует, что расстояние между шариками равно

$$R = 2r_0 \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Плечо силы взаимодействия

$$h = r_0 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (7)$$

Угол закручивания нити

$$\varphi_\Sigma = \alpha + \varphi. \qquad (8)$$

Условие равновесия коромысла весов имеет вид

$$G(\alpha+\varphi) = Fr_0 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (9)$$

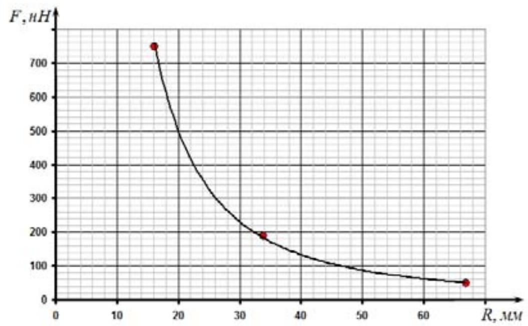
Следовательно, сила взаимодействия может быть рассчитана по формуле

$$F = \frac{G(\alpha+\varphi)}{r_0 \cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

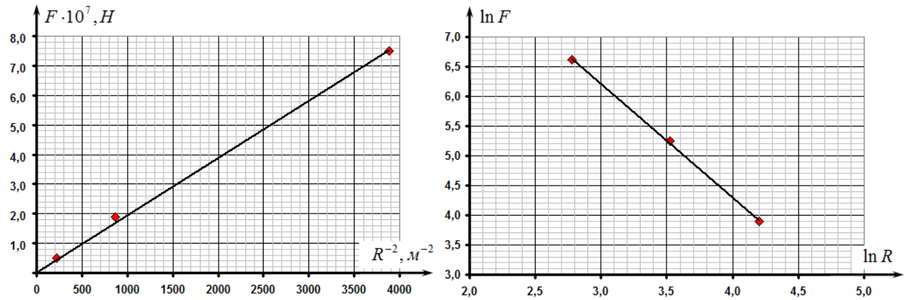
Расстояние между шариками рассчитывается по формуле (6).
Результаты расчетов по этим формулам приведены в Таблице (1). График этой функции показан на рисунке.

Таблица 1. Расчет сил и расстояний.

N	$\alpha°$	$\varphi°$	F, нН	R, мм
1	36	0	49,1	66,9
2	18	126	189,3	33,9
3	8,5	567	749,3	16,0



2.2 Для доказательства закона Кулона ($F = \frac{A}{R^2}$) следует провести линеаризацию зависимости силы от расстояния. Эту линеаризацию можно провести различными способами. например, построить зависимость $F(R^{-2})$. Наиболее предпочтительной линеаризацией является построение графика в логарифмическом масштабе $\ln F(\ln R)$. В этом случае коэффициент наклона будет равен показателю степени в зависимости $F = AR^n$. На рисунке приведены графики обеих линеаризованных зависимостей.



Действительно, коэффициент наклона в логарифмической зависимости примерно равен -1,9, что с учетом неизбежных погрешностей измерений можно принять равным -2.

Также видно. что зависимость $F(R^{-2})$ близка к линейной, поэтому эта зависимость также подтверждает закон Кулона.

2.3 В системе СИ закон Кулона имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}.$$

С помощью этой формулы можно вычислить заряды шариков. Для повышения точности следует провести усреднение по трем результатам измерений. Один из возможных вариантов такого усреднения – использование зависимости $F(R^{-2})$. В этой зависимости коэффициент наклона равен

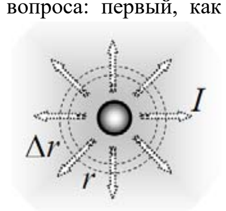
$$a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}94\cdot 10^{-10}\, H\cdot м^2, \qquad (11)$$

Откуда следует, что

$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 a} = \sqrt{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}94\cdot 10^{-10}} = 1{,}5\cdot 10^{-10}\, Кл. \qquad (12)$$

3. Утечка заряда.

Понятно, что уменьшение угла отклонения связано с утечкой зарядов с шариков. Поэтому в данной части задачи необходимо найти ответы на два вопроса: первый, как зависит заряд шарика от времени; второй – как связано изменение угла отклонения с изменением заряда.



Можно считать, что шарик находится в однородной слабопроводящей среде, а электрический ток протекает от шарика до бесконечности.
В этом случае разность потенциалов равна потенциалу шарика

$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{13}$$

Здесь обозначено b - радиус шарика (чтобы не путать с R - так мы обозначим сопротивление среды).

Для расчета сопротивления среды ее следует разделить на тонкие сферические слои. Сопротивление отдельного слоя радиуса r и толщины Δr равно

$$\Delta R = \rho\frac{\Delta r}{4\pi r^2}. \tag{14}$$

Так как радиально растекающийся ток протекает последовательно через слои, то общее сопротивление равно сумме сопротивлений всех слоев

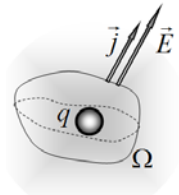
$$R = \sum_i \rho\frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2}. \tag{15}$$

Для выполнения суммирования (точнее интегрирования) можно сослаться на традиционный способ вычисления потенциала поля, создаваемого точечным источником – здесь сумма имеет тот же вид, поэтому

$$R = \sum_i \rho\frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} = \frac{\rho}{4\pi b}. \tag{16}$$

Таким образом, находим, что сила тока утечки равна

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{q}{\rho\varepsilon_0}. \tag{17}$$



<u>**Примечание.**</u> Этот же результат можно получить более изящным способом, используя теорему Гаусса. Мысленно окружим один из шариков произвольной замкнутой поверхностью Ω. Сила тока, стекающего с шарика равна потоку вектора плотности тока $\vec{j}$ через эту поверхность $I = \Phi_j$. По закону Ома в дифференциальной форме плотность пока связана с напряженностью электрического поля соотношением $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$. Поэтому поток вектора плотности тока связан с потоком вектора напряженности таким же соотношением: $\Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E$. Поток вектора напряженности поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Окончательно получаем $I = \Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E = \frac{q}{\rho\varepsilon_0}$. Полученное соотношение перепишем в виде

$$I = \frac{q}{\rho\varepsilon_0} = -\frac{\Delta q}{\Delta t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta q}{q} = -\frac{1}{\rho\varepsilon_0}\Delta t. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь, как связано угла смещения шарика с изменением зарядов на шариках. Сила взаимодействия выражается через угол смещения α посредством соотношения (10). Используя закон Кулона, можем записать

$$F = \frac{G(\alpha+\varphi)}{r_0\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(2r_0\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad q^2 = B\frac{(\alpha+\varphi)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{19}$$

где B - некоторая постоянная величина. Эта формула выражает связь между углом смещения и зарядами шариков. Обозначим функцию $f(\alpha) = \frac{(\alpha+\varphi)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Изменение заряда определяется изменением этой функции. По-видимому, в данном случае проще провести численные расчеты изменения этой функции $\Delta f = f(\alpha-\Delta\alpha) - f(\alpha)$, хотя можно воспользоваться и приближенными формулами (вычислением производных). Учитывая, что изменения заряда мало, запишем

$$\begin{gathered} q^2 = Bf(\alpha) \quad\Rightarrow \\ 2q\Delta q = B\Delta f \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f(\alpha)} \end{gathered} \tag{20}$$

Численный расчет относительного изменения заряда (при $\alpha = 30°, \Delta\alpha = -1°, \quad \varphi = 50°$) дает значение:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f(\alpha)} = -0{,}039, \tag{21}$$

<u>Примечание.</u> Для оценки можно приближенно считать, что расстояние между шариками равно длине дуги между ними $r_0\alpha$, а плечо силы равно r_0. Тогда условие равновесия примет вид

$$G(\alpha+\varphi) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2\alpha^2}r_0\alpha.$$

Тогда проводя аналогичные (20) преобразования, получим

$$\begin{gathered} q^2 = B_1\alpha(\alpha+\varphi) \quad\Rightarrow \\ 2q\Delta q = B_1(2\alpha+\varphi)\Delta\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2}\frac{2\alpha+\varphi}{\alpha(\alpha+\varphi)}\Delta\alpha = -0{,}023. \end{gathered} \tag{22}$$

Теперь вернемся к формуле (18), из которой можно выразить искомое удельное сопротивление воздуха

$$\rho = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\left(\frac{\Delta q}{q}\right)} = \frac{3\cdot 60}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}039} \approx 5{,}2\cdot 10^{14}\,Ом\cdot м. \tag{23}$$