

Решение задач. 10 класс

Задача 10-1. Вода из воздуха

1.1. Согласно определению относительной влажности начальное давление водяного пара в сосуде составляет $p_1 = \varphi p_{н1}$, где $p_{н1}$ – давление насыщенного водяного пара при комнатной температуре T_1 . Из графика на бланке можно определить: $p_{н1} \approx 2,35$ кПа. Стоит отметить, что парциальное давление водяного пара в полном давлении воздуха в сосуде составляет лишь тысячные части, а поскольку, согласно числовым данным задачи, требуемая точность решения составляет две значащие цифры, в дальнейшем влиянием водяного пара на полное давление воздуха можно будет пренебречь.

При изотермическом сжатии сосуда давление газов в нем, в том числе и водяного пара, будет увеличиваться. По достижению давления $p_{н1}$ последний начнет конденсироваться. Используя выражение для квазистационарного изотермического процесса с водяным паром, считая его идеальным газом, получим $\varphi p_{н1} V_1 = p_{н1} V_2$, где V_2 – объем газов в сосуде, при котором начнет появляться влага. Отсюда:

$$V_2 = \varphi V_1 = 0,77 \cdot 5,0 \text{ л} = 3,85 \text{ л}$$

Требуемая точность вычислений, согласно данным в условии задачи, – две значащие цифры. Однако мы будем приводить три из них для того, чтобы полученные величины можно было использовать в дальнейших вычислениях, не опасаясь за нарастание погрешности округления. Повторимся, окончательный ответ получается путем округления всех полученных в решении величин до двух значащих цифр.

1.2. Максимальное давление газов в сосуде, оказываемое как Феей, так и атмосферой, составляет $1,5 p_{атм}$. Пренебрегая парциальным давлением водяного пара и объемом образовавшейся жидкости, запишем уравнение для изотермического процесса с воздухом в сосуде: $p_{атм} V_1 = 1,5 p_{атм} V_2$, откуда:

$$V_2 = V_1 / 1,5 = 5,0 \text{ л} / 1,5 = 3,33 \text{ л}$$

Сравнивая результаты пунктов А1 и А2 видим, что Фееина установка действительно позволяет конденсировать водяной пар.

1.3 Так как давление водяного пара не может быть больше насыщенного, при уменьшении объема после значения V_2 оно будет оставаться постоянным за счет уменьшения химического количества водяного пара в сосуде. Уменьшение произойдет на количество, соответствующее количеству образовавшейся воды. Химическое количество водяного пара в начальном и конечном состоянии можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, а массу воды найдем, зная ее молярную массу:

$$m_д = M(\nu_1 - \nu_2) = M \left(\frac{\varphi p_{н1} V_1}{RT_1} - \frac{p_{н1} V_2}{RT_1} \right) = \frac{M p_{н1}}{RT_1} (\varphi V_1 - V_2) = \frac{M p_{н1}}{RT_1} (V_2 - V_2)$$

$$m_д = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 3,33 \cdot 10^3 \text{ Па}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} (273 + 20) \text{ К}} (3,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 - 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 9,03 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Таким образом, за одно сжатие Феея может получить всего 9,03 мг воды.

1.4. стакан воды можно насобирать за $N_д = m_в / m_д = 22148$ сжатий.

1.5 Несмотря на особенности изменения давления водяного пара при сжатии содержимого сосуда, основное количество работы, совершаемое Феей, определяется

давлением всего воздуха, так как последнее гораздо больше. Ввиду того, что давление газов в сосуде изменяется в ходе изотермического процесса, для грубой оценки совершенной работы будем использовать среднее арифметическое значение: $p_{ср} = (p_{атм} + 1,5 p_{атм}) / 2 = 1,25 p_{атм}$. Тогда работа, совершенная Феей, равна работе газа, взятой со знаком «минус», и определяется выражением:

$$A_{сж} = -p_{ср} (V_2 - V_1) = 211 \text{ кДж}$$

1.6 От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изотермическому процессу и представляет собой участок гиперболы. Далее процесс конденсации происходит при постоянном давлении (насыщенного пара). Обратное расширение после сбора влаги снова протекает изотермически по участку другой гиперболы из-за нового химического количества пара до первоначального объема. Далее при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке 1.

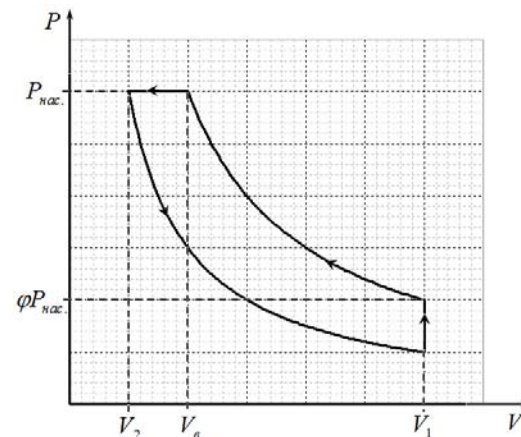


Рисунок 1 - Схематическая p-V диаграмма цикла

1.7 В ходе циклического процесса весь воздух в сосуде, пренебрегая парциальным давлением водяного пара, при сжатии и расширении проходит через одни те же состояния. Тогда работа, затраченное на сжатие и расширение всего воздуха по модулю совпадает и в сумме дает нуль. Следовательно, стоит присмотреться к работе, затраченной на процесс, произведенный непосредственно с водяным паром, даже если его парциальное давление незначительно (оно все же больше нуля). Последнюю можно рассчитать, как площадь, ограниченную построенной p-V диаграммой цикла.

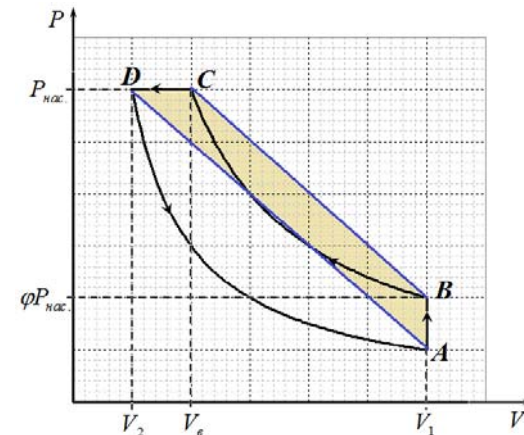


Рисунок 2 - Построения на диаграмме для расчета работы

Для грубой оценки этой работы «спрямим» криволинейные участки (рис. 2). Для расчета площади построим фигуру до треугольника CED. Также нам понадобится давление в точке D. Его можно найти, используя уравнение изотермы BC: $p_{н1} V_2 = p_C V_1$. Отсюда:

$p_D = p_{H1} \cdot V_2/V_1 = 1,57$ кПа. Работа Феда равна работе газа в ходе цикла, взятой со знаком минус. Учитывая тот факт, что цикл на диаграмме направлен против часовой стрелки, работа экспериментатора будет равна просто площади, ограниченной диаграммой $ABCD$, которую можно рассчитать как разность площадей треугольников:

$$A_d = S_{ADEF} = S_{EDF} - S_{ADF} = \frac{1}{2} (CE \cdot DE - FE \cdot AE)$$

$$A_d = \frac{1}{2} ((V_1 - V_2)(p_{H1} - p_D) - (V_1 - V_2)(p_{H1} - p_{H2})) = 0,341 \text{ Дж}$$

1.8 Согласно определению введенной удельной работы конденсации получаем:
 $Q_d = A_d/m_d = 37,7 \text{ кДж/кг}$

Задача10- 2. Слоистые резисторы

1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толщины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i ($\Delta r_i \ll r_i$).



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \frac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l \rho_i} = \frac{2\pi}{al} \sum_{i=1}^n \Delta r_i = \frac{2\pi a}{al}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки. Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{al}{2\pi a} = 10 \text{ Ом} . \quad (2)$$

1.2 Сила тока через резистор в этом случае

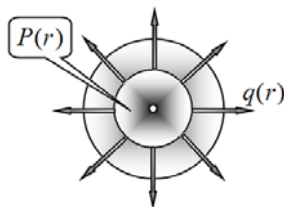
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{al} U = 0,15 \text{ А} . \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{al} U^2 = 0,23 \text{ Вт} . \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.

1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi r l$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого



резистора и коаксиального с ним, пропорциональна радиусу этого цилиндра. Поэтому выражение для мощности теплоты, выделяющейся внутри выделенного цилиндра, аналогично формуле (4). Тогда уравнение для потока теплоты будет иметь вид

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{al} U^2 = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot S = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot 2\pi r l \Rightarrow \Delta T = -\frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} \Delta r . \quad (5)$$

Согласно (5) приращение температуры данного слоя обратно по знаку приращению радиуса резистора, т.е. температура внутри него падает при увеличении r . Это означает, что максимальная температура резистора будет на его оси симметрии. Так и должно быть, поскольку теплота самопроизвольно перетекает от горячего слоя к холодному, а не наоборот

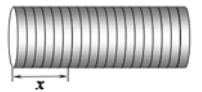
Суммируя (5) по всем слоям, найдем, что максимальная температура $T_{\max 1}$ в центре резистора будет равна

$$T_{\max 1} = T_0 - \Delta T = T_0 + \frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} a = 46^\circ \text{C} . \quad (6)$$

2. «Блинная структура»

3.

2.1 Рассмотрим блинную структуру. В этом случае сопротивление зависит от расстояния по закону $\rho(x) = \alpha \cdot x$, следовательно, для вычисления сопротивления последовательно соединенных «блинов» справедливо выражение



$$R_2 = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta x_i}{S} = \frac{\alpha}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i =$$

$$= \frac{\alpha l^2}{2S} = \frac{\alpha l^2}{2\pi a^2} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Ом} = 0,10 \text{ кОм} \quad (7)$$

2.2 Силу тока в резисторе найдём по закону Ома

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U = 15 \text{ мА} \quad (8)$$

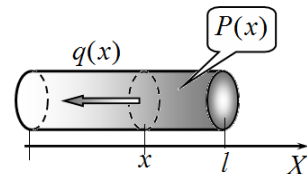
Согласно закону Джоуля-Ленца мощность тока, выделяемая в таком проводнике

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U^2 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} = 23 \text{ мВт} . \quad (9)$$

Поскольку удельное сопротивление возрастает слева направо, то при прохождении тока больше нагреется правый конец цилиндра, где его удельное сопротивление больше.

2.3 Как следует из формулы (7), сопротивление резистора на

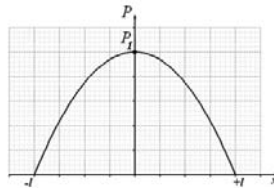
участке от x до l равно $R_{l-x} = \frac{\alpha}{2S} (l^2 - x^2)$. Поскольку сила тока в любом поперечном сечении резистора одинакова, то мощность тока, выделяемая на рассматриваемом участке резистора длиной $l - x$, может быть найдена как



$$P_{l-x} = I_2^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \left(\frac{2\pi a^2 U}{\alpha l^2} \right)^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2). \quad (10)$$

График этой функции представляет собой параболу (см. рис.), ветви которой направлены вниз.

В установившемся режиме тепловой поток $q(x)$, проходящий через поперечное сечение проводника на расстоянии x от его конца (см. рис) должен быть равен мощности, выделяющейся справа от рассматриваемого сечения (10), иначе температура резистора продолжала бы меняться. Согласно закону Фурье для теплопередачи



$$q(x) = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S = P_{l-x} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2). \quad (11)$$

Выражая из (12) малое приращение температуры, получим

$$\Delta T = -\frac{2\pi a^2 U^2}{S\gamma \alpha l^4} (l^2 - x^2) \Delta x. \quad (12)$$

Знак «-» в (12) говорит о том, что тепловой поток направлен против положительного направления оси Ox .

Суммируя (12), получим, что повышение температуры правого конца стержня пропорционально площади под графиком параболы. С учетом замечания из условия задачи, имеем

$$T_{\max 2} = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2\pi a^2 U^2}{\gamma \alpha l^4} \sum (l^2 - x_i^2) \Delta x_i = T_0 + \frac{2U^2}{\gamma \alpha l^2} \cdot \frac{2}{3} l = 370^\circ\text{C} = 3,7 \cdot 10^2 \text{C}. \quad (13)$$

2.4 В рассматриваемом случае плотность тока ($j = I/S$, $[j] = \text{A}/\text{m}^2$) не меняется вдоль резистора, поскольку площадь его поперечного сечения остается постоянной. Так как удельное сопротивление рассматриваемого резистора изменяется, то должна изменяться и напряженность поля внутри цилиндра, что возможно только при накоплении объемных зарядов внутри него! Согласно закону Ома в дифференциальной форме (для плотности тока) можем записать

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot E \Rightarrow E = \rho \cdot j, \quad (14)$$

где E – напряженность электрического поля в данном сечении резистора. С учетом зависимости $\rho(x) = \alpha \cdot x$ получаем

$$E(x) = \alpha x \cdot \frac{I_2}{S} = \frac{2U}{l^2} \cdot x. \quad (16)$$

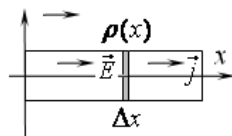
Следовательно, для приращения напряженности электрического поля справедливо выражение

$$\Delta E = j \cdot \Delta \rho. \quad (15)$$

Приращение напряженности поля связано с объемным зарядом, «сядющим» на малом слое проводника толщиной Δx

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{\epsilon_0} \Rightarrow j \Delta \rho = \frac{\rho^* \Delta x}{\epsilon_0} \quad \rho^* = \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \epsilon_0 j. \quad (16)$$

При выводе этого соотношения использована формула для



напряженности поля, создаваемого тонким слоем заряда.

2.6 Используя (16), суммируя по слоям, найдем полный заряд, «сядющий» внутри резистора на всем его протяжении

$$q^* = \sum_{i=1}^n q^*_i = \sum_{i=1}^n \rho^*_i S \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_0 j S \Delta \rho_i = \epsilon_0 j S \sum_{i=1}^n \Delta \rho_i = \epsilon_0 I \alpha l = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} U = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Кл}. \quad (17)$$

Интересно, что согласно (18), это соответствует динамической емкости резистора

$$C = \frac{q^*}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} = \frac{2\epsilon_0 S}{l} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ Ф} = 0,11 \text{ пФ}. \quad (18)$$

Задача 10-3. Просто цепь

Первоначально цепь может показаться симметричной относительно горизонтальной линии, проходящей через центр рисунка, что позволило бы отбросить участок цепи KE (рисунок 1), поскольку ток через него не идет. Однако такое предположение неверно, поскольку элементы с несимметричной вольт-амперной характеристикой – диоды – включены навстречу друг другу. Если напряжение приложено к диоду в обратном направлении, то, согласно вольт-амперной характеристике, ток через него не идет. Так, ток не пойдет через нижний диод D .

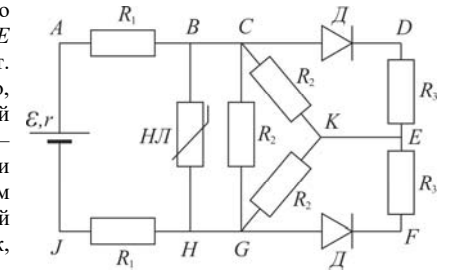


Рисунок 3 - Схема электрической цепи с обозначениями ключевых точек

Действительно, если предположить, что через оба диода ток в соответствующем направлении все же идет, то получим, что потенциал в точках C и G больше потенциала в точке E . Но тогда токи в узел K со всех сторон будут входить и никуда не выходя, чего быть не может. Таким образом, ток через нижний диод D на самом деле не будет проходить и, соответственно, ток через нижний резистор R_3 равен нулю. Поскольку ток и напряжение резисторе связаны линейным соотношением, то напряжение на нижнем резисторе R_3 также равно нулю. В силу отсутствия тока для дальнейшего изучения цепи участок GFE можно отбросить (рис. 2).

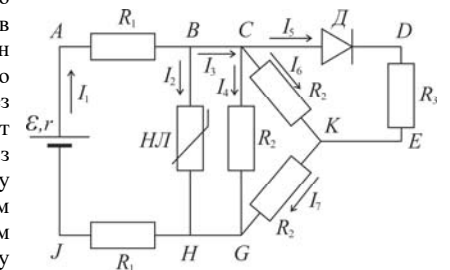


Рисунок 4 - Схема электрической цепи после отбрасывания участка с "закрытым" диодом

Так как вольт-амперная характеристика для нелинейного элемента задана графически, то для нахождения тока I_2 , проходящего через него, будем использовать графический метод. Для этого необходимо найти связь между напряжением на нелинейном элементе $U_{\text{ВН}}$ и током через него I_2 , определяемую всеми остальными элементами цепи.

Начнем рассмотрение с узла С. В нем разветвляется ток I_3 , что позволяет записать следующее соотношение для токов: $I_3 = I_4 + I_5 + I_6$. Все токи можно выразить через соответствующие напряжения с помощью закона Ома для участка цепи с резисторами:

$$I_4 = \frac{U_{CG}}{R_2}, \quad I_5 = \frac{U_{DE}}{R_2}, \quad I_6 = \frac{U_{CK}}{R_2}$$

Изучая вольт-амперную характеристику диода при его прямом включении можно заметить, что в случае напряжения на элементе, меньшего $U_d = 0,70$ В, ток не пойдет. В противном случае через диод может проходить любой ток, при этом на элементе падение напряжения будет равно U_d . Будем считать, что через диод ток протекает. В случае неверного предположения мы получим явно некорректный результат в виде, например, обратного направления тока через оставшийся резистор R_3 .

Получаем, что напряжение U_{DE} можно выразить: $U_{DE} = U_{CK} - U_d$. Поскольку в итоге мы хотим получить связь напряжения и тока в нелинейном элементе, то будем пытаться выразить все имеющиеся напряжения через $U_{CG} = U_{BH}$. Для участка KG с резистором R_2 можно записать $U_{CG} = I_7 R_2$, что приводит к:

$$U_{CG} - U_{CK} = (I_5 + I_6) R_2 = \left(\frac{U_{DE}}{R_2} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2 = \left(\frac{U_{CK} - U_d}{R_2} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2$$

Отсюда можно выразить:

$$U_{CK} = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_2}}{2 + \frac{R_2}{R_2}} = \frac{U_{CG} R_2 + U_d R_2}{2R_2 + R_2}$$

$$U_{DE} = U_{CK} - U_d = \frac{U_{CG} R_2 + U_d R_2}{2R_2 + R_2} - U_d \quad (1)$$

Тогда, возвращаясь назад к току I_3 , получим:

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 = \frac{U_{CG}}{R_2} + \frac{U_{DE}}{R_2} + \frac{U_{CK}}{R_2} = U_{CG} \frac{2R_2 + 3R_2}{R_2(2R_2 + 2R_2)} - \frac{U_d}{R_2 + 2R_2}$$

Ток через источник разветвляется в узле В следующим образом: $I_1 = I_2 + I_3$. С другой стороны, этот ток можно определить из закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Полное сопротивление всей цепи R можно записать как сумму сопротивлений двух резисторов R_1 , включенных последовательно с источником, и сопротивления оставшейся цепи, которое выразим через закон Ома:

$$R = 2R_1 + \frac{U_{BH}}{I_1}$$

Тогда из последних двух выражений можно получить выражение для тока:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U_{BH}}{r + 2R_1} \quad (2)$$

Наконец, получаем выражение для тока через нелинейный элемент, учитывая равенство напряжений $U_{BH} = U_{CG}$:

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{\mathcal{E} - U_{BH}}{r + 2R_1} - U_{BH} \frac{2R_2 + 3R_2}{R_2(2R_2 + 2R_2)} + \frac{U_d}{R_2 + 2R_2} \quad (3)$$

Полученное выражение представляет собой зависимость силы тока I_2 , протекающей через нелинейный элемент HL , от напряжения на нем U_{BH} . Подставив численные значения характеристик, получим:

$$I_2 = 0,094 \text{ А} - 0,125 \text{ Ом} \cdot U_{BH}$$

Данная зависимость определяет прямую, которую можно провести на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента (рисунок 3).

Координаты точки пересечения графиков как раз определяют ток и напряжение на нелинейном элементе. Получаем: $I_2 \approx 0,042$ А, $U_{BH} \approx 0,41$ В. Тогда по формуле (1), полученной ранее, найдем напряжение на оставшемся резисторе R_3 :

$$U_{DE} = (U_{BH} - 2U_d) \frac{R_2}{2R_2 + R_2} = -0,297 \text{ В}$$

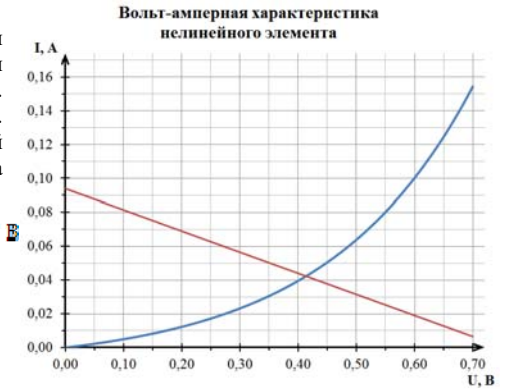


Рисунок 5 - Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента с пересечением прямой, характеризующей цепь

Полученный отрицательный результат говорит о том, что ток идет через резистор R_3 в направлении, обратном предполагаемому, чего быть не может. Получаем, что допущение о том, что через верхний диод D ток идет, неверно. То есть напряжение на участке CK меньше, чем U_d (в этом можно убедиться, проведя расчеты по имеющимся формулам), что недостаточно для «открытия» диода. Таким образом, можно сделать вывод, что ток через оставшийся резистор R_3 не пойдет и, соответственно, напряжение на нем будет равно нулю.

Ответ: токи и напряжения на обоих резисторах R_3 равны нулю.

Примечания:

Задачу можно было решить и альтернативным способом, с самого начала предположив, что токи через оба диода не пойдут. Тогда, проведя необходимые вычисления данной электрической цепи, необходимо было бы показать, что напряжение на участке CK меньше, чем U_d .

Наконец имеется еще один, самый короткий, способ решения. Руководствуясь значениями ЭДС источника, его внутреннего сопротивления и сопротивлений R_1 , можно рассчитать, что максимально возможная сила тока в цепи составляет 0,080 А. Тогда, согласно вольт-амперной характеристике нелинейного элемента, максимальное напряжение на нем — 0,55 В. Отсюда следует, что напряжение на диодах не сможет превысить достаточно $U_d = 0,70$ В, чтобы ток через них проходил. Отсюда сразу следует ответ данной задачи.

После того, как участки цепи с диодами оказались выключенными, осталось рассчитать силу тока через резисторы R_1 . Три резистора R_2 можно заменить на резистор с сопротивлением $\frac{3}{2}R_2$. Тогда рассматриваемая схема приобретет вид, показанный на рис. 4.

Для расчета этой цепи можно воспользоваться уже использованным графическим методом, основанном на уравнениях (2)-(3). Так как участок цепи с диодами отключен, то в уравнении (3) следует положить $R_3 \rightarrow \infty$, в результате чего получим

$$I_2 = \frac{\varepsilon - U}{r + 2R_1} - \frac{3U}{2R_2}$$

Здесь обозначено $U = U_{BH}$ - напряжение на нелинейном элементе. Подставляя численные значения, получим

$$I_2 = 0,080 - 0,155U$$

Построив график этой прямой на графике ВАХ нелинейного элемента, по координатам точки пересечения найдем силу тока $I_2 \approx 7 \text{ mA}$ и напряжение $U = U_{BH} \approx 0,14 \text{ B}$. Это же напряжение приложено и к параллельно подключенному резистору, поэтому силу тока через него

$$I_3 = \frac{3U}{2R_2} \approx 10 \text{ mA}.$$

Искомая сила тока через резисторы R_2 равна сумме

$$I_1 = I_2 + I_3 \approx 17 \text{ mA}.$$

