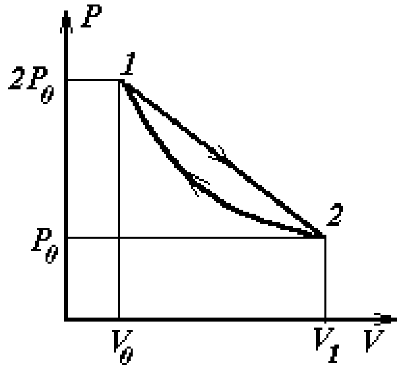
Задача 7. «Прямая и адиабата»

Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, изображенный на рисунке: $1 \to 2$ прямая, $2 \to 1$ – адиабата.



1. Найдите отношение V_1 / V_0.

2. Какова максимальная температура газа в цикле?

3. Постройте примерный график зависимости теплоемкости газа на участке $1 \to 2$ от его объема.

4. Постройте график зависимости количества теплоты, полученной газом при расширении на участке $1 \to 2$, от его объема.

5. Найдите к.п.д. цикла.

Решение.

Предисловие.

Сразу видно (нужно использовать уравнение адиабаты, подсчитывать теплоту и работу и т.д.), что решение данной задачи будет насыщено многочисленными и громоздкими алгебраическими выкладками. Поэтому можно «упростить себе жизнь», избавившись от постоянных, фигурирующих в условии задачи. Это можно сделать, введя свою систему единиц измерения. Заметим, что во всех громоздких задачах такие замены переменных существенно упрощают математические преобразования, или, по меньшей мере, экономят бумагу.

В качестве единиц измерения давления и объема логично взять величины P_0, V_0. *Тогда давление и объем* P, V, *измеренные в этих единицах (обозначим их малыми буквами* p, v*), будут соответственно определяться*

$$p = \frac{P}{P_0}, \quad v = \frac{V}{V_0} \,. \tag{1}$$

Определим также единицу измерения температуры. Из уравнения состояния одного моля идеального газа и определений (1) выразим

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{P_0 V_0}{R} pv \,. \tag{2}$$

Если теперь ввести единицу измерения температуры равную $\frac{P_0 V_0}{R}$, *то температура в этих единицах примет вид*

$$t = \frac{TR}{P_0 V_0} \,. \tag{3}$$

Тогда уравнение состояния принимает простой и изящный вид

$$pv = t \,. \tag{4}$$

Определим также единицы измерения работы, теплоты и энергии, используя известное соотношение для работы $A = P\Delta V = (P_0 V_0) p \Delta v$. *Откуда видно, что в качестве единицы работы, теплоты и энергии следует взять произведение* $P_0 V_0$. *Тогда внутренняя энергия одноатомного идеального газа в этих единицах будет выражиться формулой*

$$\Delta u = \frac{\Delta U}{P_0 V_0} = \frac{\frac{3}{2} R \Delta T}{P_0 V_0} = \frac{3}{2} \Delta t \,. \tag{5}$$

Наконец, найдем единицу измерения теплоемкости.

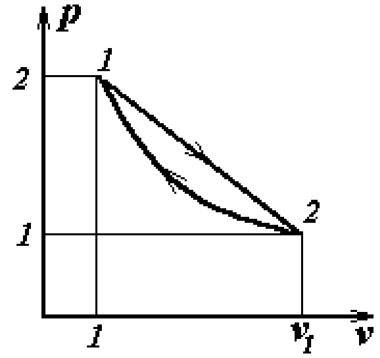
$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{P_0 V_0 \Delta q}{\frac{P_0 V_0}{R} \Delta t} = R \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

откуда следует, что единицей теплоемкости является универсальная газовая постоянная, то есть

$$c = \frac{C}{R} \,. \tag{6}$$

Переход к обычным единицам измерения осуществляется по формулам, обратным к (1), (3), (5), (6).

Теперь можно приступать непосредственно к решению задачи.



1. Перерисуем график рассматриваемого процесса в нашей системе единиц. Для этого необходимо только перенумеровать оси координат. Запишем уравнение адиабатического процесса $2 \to 1$

$$pv^{\gamma} = 2, \tag{7}$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V} = \dfrac{5}{3}$ показатель адиабаты для одноатомного газа (это обычное уравнение адиабатического процесса в которое подставлены начальные условия $p = 2, \quad v = 1$). Из уравнения (7), полагая $p = 1$ находим

$$v_1 = \frac{V_1}{V_0} = 2^{1/\gamma} = 2^{\frac{3}{5}} \approx 1{,}516\,. \tag{8}$$

2. Процесс расширения на участке $1 \to 2$ описывается линейной функцией вида

$$p = 2 - a(v-1),$$

где параметр зависимости a можно определить по известному значению давления и объема в крайней точке 2:

$$1 = 2 - a(v_1 - 1),$$

откуда следует, что $a = \dfrac{1}{v_1 - 1} \approx 1{,}94$, а уравнение процесса

$$p = 2 - \frac{v-1}{v_1-1} = \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1}. \tag{9}$$

Температуру газа можно вычислить из уравнения состояния идеального газа $pv = t$ и уравнения процесса (9):

$$t = pv = \frac{(2v_1 - 1 - v)v}{v_1 - 1}. \tag{10}$$

Эта функция имеет максимум[1] при

$$v_{(1)} = \frac{2v_1 - 1}{2} \approx 1{,}016\,, \tag{11}$$

соответствующее максимальное значение температуры определяется по формуле

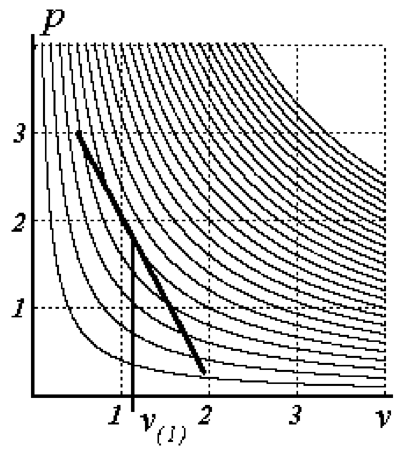
$$t_{max} = \frac{(2v_1 - 1 - v_{(1)})v_{(1)}}{v_1 - 1} = \frac{(v_1 - \frac{1}{2})^2}{v_1 - 1} \approx 2{,}00\,. \tag{12}$$

Или в обычных единицах $\boxed{T_{max} = 2{,}00\dfrac{P_0V_0}{R}}$

Изобразим на нашей диаграмме семейство изотерм и проведем участок процесса $1 \to 2$. Видно, что в точке $v_{(1)} \approx 1{,}016$ исследуемая прямая является касательной к

[1] Положение максимума можно искать традиционным универсальным способом, вычисляя производную и полагая ее равной нулю. Однако в данном случае функция квадратичная, а ее экстремум лежит точно на середине между корнями, которые в выражении (10) очевидны.

одной из изотерм, очевидно также, что этой изотерме соответствует максимальная температура. Эта точка близка к началу нашего цикла, поэтому максимальная температура лишь незначительно превышает температуру в точке 1, равную точно двум.



3. Для вычисления теплоемкости газа $c = \dfrac{\delta q}{dt}$ воспользуемся уравнением первого начала термодинамики[2]

$$\delta q = du + \delta a,$$

где δq – количество теплоты, полученной газом, du – изменение его внутренней энергии, δa – работа совершенная газом. Учитывая, что

$\delta a = pdv$, а для одноатомного идеального газа

$du = \dfrac{3}{2}dt$, для теплоемкости получим

$$c = \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p\frac{dv}{dt}. \qquad (13)$$

Из уравнения процесса (9) найдем изменение температуры dt при изменении объема на величину dv –

$$dt = \frac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1}dv$$

и подставим в формулу (13)

$$c = \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p\frac{dv}{dt} = \frac{3}{2} + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1}\cdot\frac{dv}{\dfrac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1}dv} = \frac{10v_1 - 5 - 8v}{2v_1 - 1 - 2v} \approx \frac{2{,}54 - 2v}{1{,}017 - v}. \qquad (14)$$

Эта функция терпит разрыв и устремляется к бесконечности в точке $v_{(1)} = \dfrac{2v_1 - 1}{2}$. Как мы определили раньше, в этой точке температура газа максимальна, следовательно, вблизи ее процесс близок к изотермическому, для которого теплоемкость бесконечна. При $v_{(2)} = \dfrac{10v_1 - 5}{8} \approx 1{,}27$ теплоемкость газа становится равной нулю, следовательно, вблизи этой точки процесс близок к адиабатическому.

График этой функции представлен на рисунке.

Построим теперь семейство адиабат и нанесем на него участок изучаемого процесса. Хорошо заметно, что в точке $v_{(2)} \approx 1{,}27$ прямая касается адиабаты, поэтому в этой точке теплоемкость обращается в нуль.

4. Еще раз запишем уравнение второго начала термодинамики для участка процесса $1 \to 2$ при изменении объема от 1 до v:

$$q = \Delta u + a$$

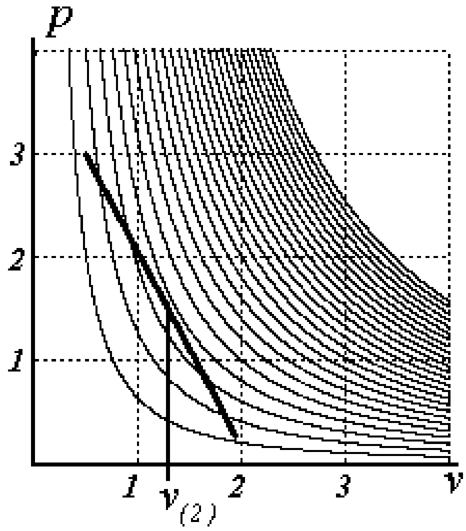
Выражение для внутренней энергии представим в виде

---

[2] Обратите внимание на традиционно используемые обозначения: du - изменение внутренней энергии не зависит от вида процесса, так как внутренняя энергия является функцией состояния системы, $\delta q, \delta a$ - количество теплоты и совершенная работа являются характеристиками процесса и функциями состояния не являются.

$$\Delta u = \frac{3}{2}\Delta t = \frac{3}{2}\left(\frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} - 2\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{(2v_1 - 1)v - v^2 - 2(v_1 - 1)}{v_1 - 1}. \qquad (15)$$

Совершенная газом работа также легко может быть найдена из графика процесса (как площадь под участком прямой)

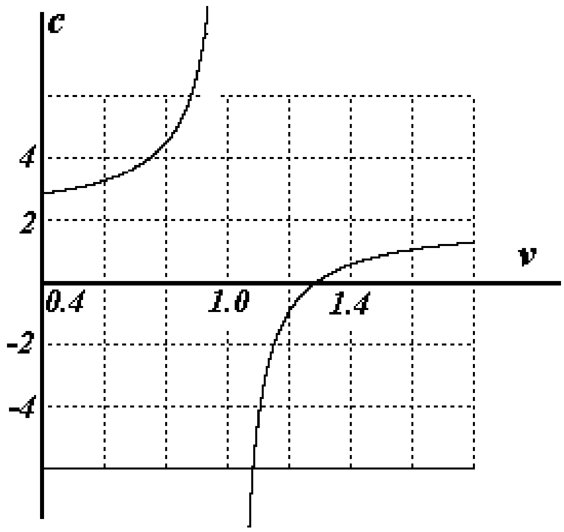


$$a = \frac{2 + p}{2}(v - 1) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1}\right)(v - 1) = $$
$$= \frac{1}{2}\frac{(4v_1 - 2)v - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} \qquad (16)$$

Таким образом,

$$q = \Delta u + a = \frac{-4v^2 + v(10v_1 - 5) - (10v_1 - 9)}{2(v_1 - 1)}. \qquad (17)$$

Зависимость полученной теплоты от объема является квадратичной функцией, которая достигает максимума при $v_{(2)} = \frac{10v_1 - 5}{8} \approx 1{,}27$, и максимальное значение функции

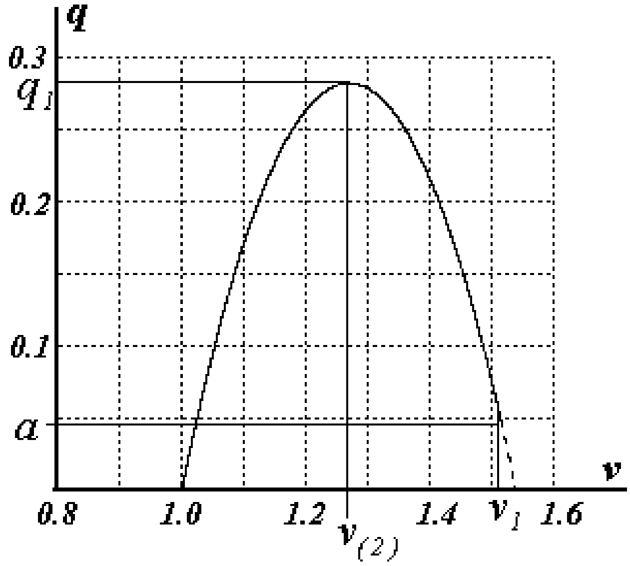


$$q_1 = q(v_{(2)}) = \frac{(10v_1 - 13)^2}{32(v_1 - 1)} \approx 0{,}281, \quad (16)$$

Как уже отмечалось, в этой точке теплоемкость равна нулю, то есть прямая процесса $1 \to 2$ близка к адиабате. Следовательно, при расширении до этого газ получает теплоту, а далее ее отдает. Таким образом количество полученной теплоты следует определять как максимальное значение функции (17), т.е. q_1.

Совершенную за цикл работу определим как разность между полученной и отданной теплотой, то есть она равна значению функции (15) в крайней точке цикла $v = v_1$ –

$$a = q(v_1) = \frac{6v_1 - 9}{2} \approx 0{,}047. \qquad (18)$$



При этом, мы учитываем, что участок цикла $2 \to 1$ является адиабатой, проходит без теплообмена. График функции (17) изображен на рисунке и представляет собой обычную параболу.

Заметим, что полную работу за цикл нельзя рассчитывать по формуле (16), так как она дает выражение для работы на участке $1 \to 2$, и не учитывает отрицательную работу по сжатию газа на обратном участке $2 \to 1$. Действительно, полагая в формуле (16) $v = v_1$, получим

$$a_{1\to 2} = \frac{1}{2}\frac{(4v_1 - 2)v_1 - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} = \frac{3(v_1 - 1)}{2} \approx 0{,}77\,,$$

что значительно больше, чем ранее полученное правильное значение.

4. Теперь коэффициент полезного действия этого цикла вычисляется «по определению»

$$\eta = \frac{a}{q_1} \approx 0{,}17\,. \tag{18}$$

Замечания и комментарии.

1. Традиционный метод расчета коэффициента полезного действия заключается в определении участков, на которых рабочее тело получает и отдает теплоту, и последующему расчету этих теплот. В данном случае на одной прямой сначала происходит передача теплоты от нагревателя к рабочему телу, а затем от рабочего тела к холодильнику. Поэтому основная сложность данной задачи, определить то значение объема до которого газ получает и после которого отдает теплоту.

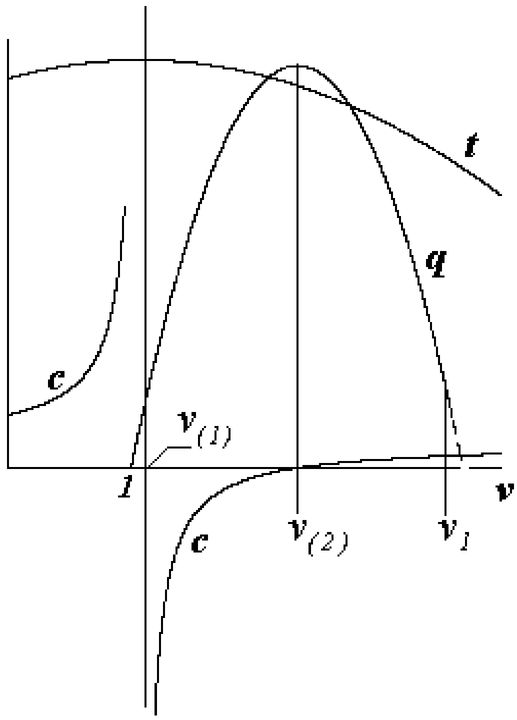
Заметим, что эта точка

а) не является точкой максимальной температуры;

б) точкой в которой теплоемкость становится отрицательной.

Эта точка есть точка касания с адиабатой.

Рассмотрим различные участки этого интересного процесса подробнее, для чего на одном графике изобразим зависимости температуры, теплоемкости и количества полученной теплоты от объема (просто совместим все построенные ранее графики).

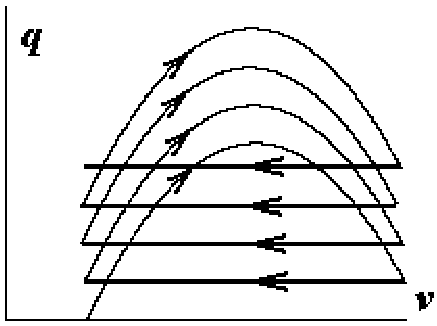


А) На участке $v < v_{(1)}$ теплоемкость положительна, температура возрастает $(c > 0, \Delta t > 0)$ поэтому газ получает теплоту $(\delta q = c\Delta t > 0)$.

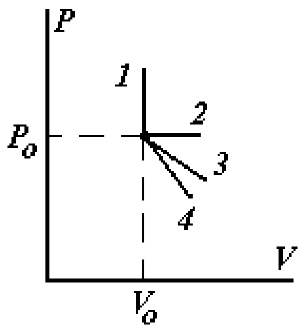
Б) На участке $v_{(1)} < v < v_{(2)}$ теплоемкость отрицательна, но и температура уменьшается $(c < 0, \Delta t < 0)$, поэтому здесь газ также получает теплоту $(\delta q = c\Delta t > 0)$. Этот участок характерен тем, что здесь газ совершает работу большую, чем полученное количество теплоты, восполняя недостаток за счет собственной внутренней энергии. Поэтому и происходит понижение его температуры.

В) На участке $v > v_{(2)}$ теплоемкость положительна, температура газа уменьшается $(c > 0, \Delta t < 0)$, поэтому здесь газ отдает теплоту $(\delta q = c\Delta t < 0)$.

2. Особо подчеркнем, что теплота не является функцией состояния, поэтому график зависимости $q(v)$ необходимо понимать так, как оговорено в условии



q – <u>есть количество теплоты, полученное при расширении газа, начиная от точки 1</u>. Чтобы подчеркнуть, что теплота не является функцией состояния продолжим построение диаграммы в координатах (q,v) - адиабата изобразится прямой, параллельной оси v. Как и следовало ожидать, цикл в этих координатах не замыкается. Если нарисовать кривые, соответствующему второму, третьему прохождениям цикла, то они пойдут выше.



3. Небольшой участок любого процесса можно приближенно заменить участком прямой (например, на диаграмме PV). Так на рисунке отрезки соответствуют следующим процессам (укажем также значения молярной теплоемкости для одноатомного газа):

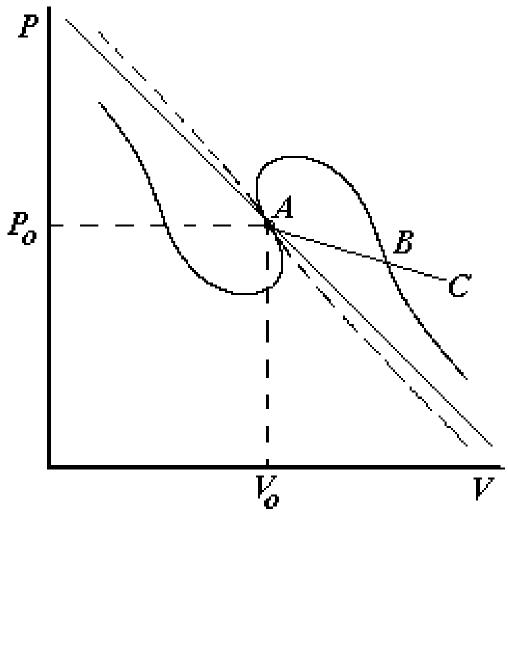
1 – изохора ($C = \frac{3}{2}R$); 2 – изобара ($C = \frac{5}{2}R$); 3 – изотерма ($C \to \infty$); 4 – адиабата ($C = 0$). Как видите значение теплоемкости изменяется немонотонным образом.

Посмотрим как изменяется теплоемкость процесса в зависимости от наклона его графика. Запишем уравнение процесса в виде $P = P_0 + k(V - V_0)$. Для него зависимость температуры от объема выражается уравнением

$$RT = (P_0 + k(V - V_0))V = (P_0 - kV_0)V + kV^2.$$

Теплоемкость вычислим с помощью формулы (аналогичной (13), только в обычной системе единиц)

$$C = C_V + P\frac{dV}{dT} = C_V + R\frac{P_0 + k(V - V_0)}{P_0 - kV_0 + 2kV} = C_V + R\frac{P_0}{P_0 + kV_0}.$$



Предлагаю самостоятельно разобраться и проанализировать эту функцию. На рисунке приведен ее график «в полярных координатах». Так для процесса ABC теплоемкость пропорциональна длине отрезка AB. Сплошная прямая соответствует изотермическому процессу вблизи точки A, она же является асимптотой для графика теплоемкости. Пунктиром обозначены участки для которых теплоемкости отрицательны.

4. Рекомендую полностью решить исходную задачу в обычной системе единиц.

5. Решите также эту же задачу для аналогичного цикла (прямая и адиабата), если в пределах цикла объем увеличивается в два раза.