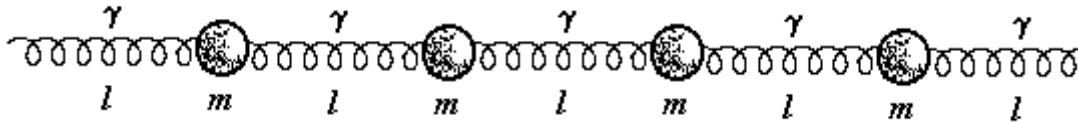


Задача 6. «Упругая цепочка»

Бесконечная цепочка состоит из одинаковых шариков (масса каждого m), соединенных одинаковыми легкими пружинами (жесткость каждой γ). В положении равновесия расстояния между шариками равны l , пружины немного растянуты так, что сила натяжения каждой равна T_0 .



Часть 1. Продольные волны.

Допустим, что каждый шарик может двигаться только в направлении вдоль цепочки.

1.1. Найдите собственную частоту колебаний одного из шариков ω_0 , если два соседних закреплены.

1.2. По цепочке распространяется продольная волна. Найдите сдвиг фаз между колебаниями двух соседних шариков при частоте волн ω .

1.3. При каких частотах колебаний ω по цепочке могут распространяться бегущие волны?

1.4. Найдите скорость распространения продольной волны по цепочке. Постройте примерный график этой зависимости.

1.5. Найдите скорость распространения продольной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости звука в упругой среде $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E — модуль Юнга, ρ — плотность среды.

1.6. В цепочке неподвижно закрепили неподвижно два шарика так, что между ними оказалось n шариков. Определите все частоты собственных колебаний этого участка цепочки, соответствующие различным модам стоячих волн.

Часть 2. Поперечные волны.

Пусть шарiki способны перемещаться только в направлении перпендикулярном цепочке, причем их смещения малы ($\Delta x \ll l$).

2.1. Определите частоту поперечных колебаний одного шарика, если два соседних закреплены.

2.2. Найдите скорость распространения поперечной волны по цепочке.

2.3. Найдите скорость распространения поперечной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости поперечных волн в упругой среде $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где G — модуль сдвига, ρ — плотность среды.

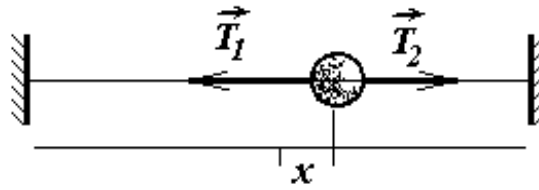
2.4. Найдите минимально возможную длину волны, которая может распространяться по цепочке.

2.5. На основании качественных рассуждений определите, как зависит скорость распространения поперечной волны от ее амплитуды, когда смещение шариков сравнимо с расстоянием между ними.

Решение.

Часть 1.

1.1. Обозначим смещение шарика от положения равновесия через x .



На шарик будут действовать силы упругости пружин, причем, на основании закона Гука можно записать

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \gamma \cdot x \\ T_2 &= T_0 - \gamma \cdot x. \end{aligned}$$

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = T_2 - T_1,$$

где a – ускорение шарика, подставляя выражения для сил упругости, получим

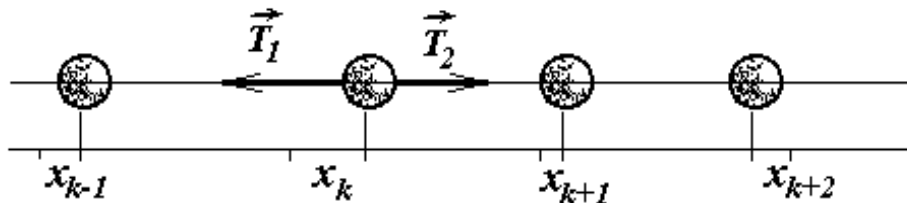
$$ma = -2\gamma \cdot x. \quad (1)$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}. \quad (2)$$

Так как сила упругости пропорциональна деформации пружины, то в уравнениях движения можно не учитывать начальную деформацию пружин и наличие начальной силы их натяжения T_0 . Действительно, каждый шарик соединен с двумя пружинами с противоположных сторон, поэтому силы T_0 будут компенсировать друг друга, и в уравнениях движения будут оставаться только линейные члены, возникающие из-за дополнительных деформаций пружин.

1.2. Рассмотрим бесконечную цепочку. Пронумеруем все шарики, обозначим смещение k -го шарика от его положения равновесия через x_k , а его ускорение a_k .



На основании второго закона Ньютона запишем уравнение движения k -го шарика

$$ma_k = -T_1 + T_2,$$

или, принимая во внимание закон Гука,

$$ma_k = -\gamma(x_k - x_{k-1}) + \gamma(x_{k+1} - x_k).$$

Разделим обе части уравнения на m и приведем подобные члены.

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}. \quad (3)$$

Таким образом, мы получили бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений, определяющих ускорения каждого шарика. Без задания дополнительных условий эта система имеет бесконечно много решений. В данном случае нас интересует решения типа бегущей волны, для которой смещения шариков изменяются по гар-

моническому закону с одинаковыми частотами и амплитудами, но разными начальными фазами колебаний. Поэтому будем искать решение системы (3) в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (4)$$

Понятно, что сдвиги фаз колебаний между соседними шариками $\Delta\varphi$ должны быть одинаковы, кроме того, выбор начальной фазы колебаний одного из шариков произволен. Поэтому в уравнение (3) подставим следующие выражения для смещений

$$\begin{aligned} x_k &= A \cos(\omega t) \\ x_{k-1} &= A \cos(\omega t - \Delta\varphi). \\ x_{k+1} &= A \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Получим:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t - \Delta\varphi) + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для суммы косинусов, это уравнение можно преобразовать к виду

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t \cos \Delta\varphi.$$

После сокращения на $A \cos \omega t$, из последнего уравнения выразим значение косинуса сдвига фаз

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (6)$$

а величина сдвига фаз определяется формулой

$$\Delta\varphi = \pm \arccos\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \quad (7)$$

Заметим, что два знака в полученном решении соответствуют бегущим волнам, распространяющимся в противоположных направлениях.

1.3. Так как величина косинуса действительного аргумента не может превышать по модулю единицу, то на возможные частоты бегущих волн накладывается ограничение (следующее из формулы (6))

$$\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \leq 1,$$

из которого находим

$$\omega \leq \sqrt{2}\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \quad (8)$$

Мы получили, что при частотах больших, чем определяется формулой (8) не существует решений уравнений (3), в виде бегущих волн, что и свидетельствует о том, что существует предельная частота волн, которые могут распространяться по цепочке. Физический смысл полученного ограничения мы выясним несколько позднее.

1.4. Как было отмечено ранее начальная фаза колебаний одного из шариков может быть выбрана произвольно, поэтому решение уравнений (3) можно записать в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + k\Delta\varphi),$$

где величина $\Delta\varphi$ определяется формулой (7). Для того, что бы рассчитать скорость распространения волны, выразим номер шарика k через его координату $z - k = \frac{z}{l}$. (Напомним, что величины x_k обозначают смещения шариков от их собственных положений равновесия, мы обозначаем координатой z положение шарика).

Теперь мы имеем уравнение бегущей волны в явном виде:

$$x(z,t) = A \cos(\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi). \quad (9)$$

Скорость распространения волны c можно получить из условия постоянства фазы одной из точек, «привязанной» к самой волне:

$$\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi = const,$$

откуда следует

$$c = \frac{|\Delta z|}{|\Delta t|} = \frac{\omega l}{\Delta\varphi} = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (10)$$

Для построения графика зависимости $c(\omega)$, найдем значение скорости волны при малых частотах, $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$. В этом пределе сдвиг фаз между колебаниями сосед-

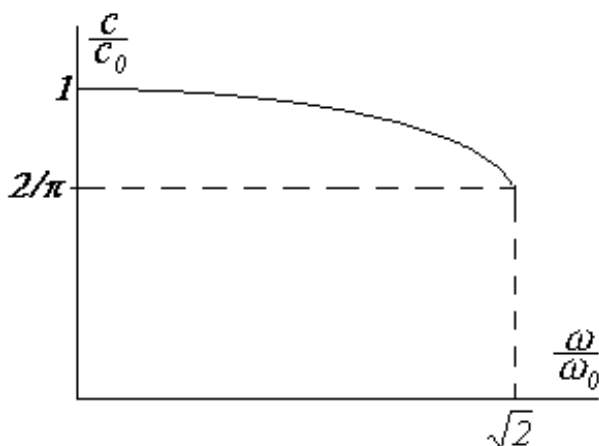
них точек является малой величиной, поэтому можно положить $\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{2}$.

Тогда из уравнения (6) следует: $\Delta\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{2}$. Подставляя это значение в формулу

(10), получим скорость распространения низкочастотных волн

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Используя это значение формулу (10) перепишем в виде



$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{2}(\omega / \omega_0)}{\arccos(1 - (\omega / \omega_0)^2)}, \quad (12)$$

в котором скорость волны выражается через отношение частот ω / ω_0 . Напомним, что частота ω не может превышать $\sqrt{2}\omega_0$. При $\omega / \omega_0 = \sqrt{2}$ функция (12) принима-

ет значение, равное $2 / \pi$. Таким образом, эта функция является монотонно убывающей от 1 до $2 / \pi \approx 0,64$.

Как видно из проведенного анализа, скорость волны достаточно слабо зависит от ее частоты, а при малых частотах этой зависимость можно пренебречь и считать скорость волны, постоянной. Рассматриваемая система является достаточно хорошей моделью упругих волн в твердых телах. В твердых телах величина ω_0 настолько велика, что даже при ультразвуковых частотах хорошо выполняется низкочастотное приближение.

1.5. В низкочастотном пределе скорость волны определяется формулой (11), если подставить значение ω_0 , получим

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}}. \quad (13)$$

Покажем, что эта формула является аналогом формулы для скорости звука в твердых телах $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Запишем закон Гука в форме $\sigma = E\varepsilon$, где σ – механическое напряжение, возникающее в теле при относительной деформации ε . Наша задача является одномерным аналогом сплошного твердого тела, поэтому аналогом механического напряжения будет сила упругости пружинки $T = \gamma x$, относительная деформация может быть записана в виде $\varepsilon = \frac{x}{l}$, тогда $T = \gamma \varepsilon l$. Таким образом, видим, что аналогом модуля Юнга служит величина γ . Аналогом плотности является отношение $\frac{m}{l}$. Если подставить эти выражения в формулу для скорости звука, то получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

в полном соответствии с рассчитанной скоростью продольных волн по цепочке.

1.6 Для изучения стоячих волн обратимся к системе уравнений (3)

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}.$$

Теперь решение этих уравнений необходимо искать в форме стоячей волны, для которой частоты и фазы колебаний для всех шариков одинаковы, а амплитуды изменяются по гармоническому закону. Кроме того, необходимо учесть, что в данном случае наша цепочка ограничена, причем амплитуды колебаний нулевого и $(n + 1)$ -го шариков равны нулю. Положим

$$x_k = A \sin k\beta \cos \omega t. \quad (14)$$

При такой записи при $k = 0$ колебания нулевого шарика отсутствуют, $x_0 = 0$. Также должно выполняться условие $x_{n+1} = 0$, которое налагает ограничения на возможные значения параметра β :

$$\sin(n + 1)\beta = 0,$$

откуда следует $(n + 1)\beta = j\pi$, или

$$\beta_j = j \frac{\pi}{n+1}; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (15)$$

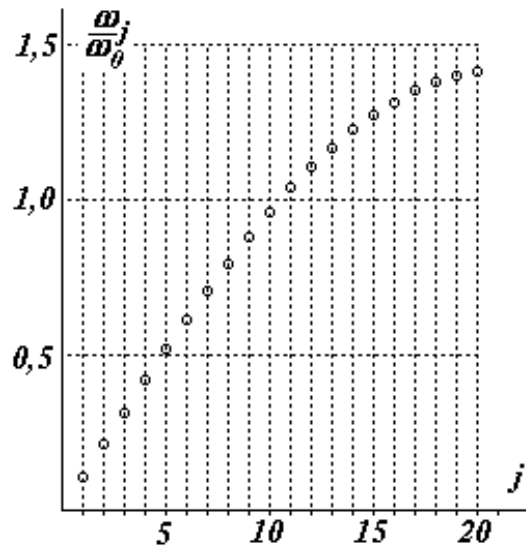
Подставим пробное решение (14) с определенным значением β_j в уравнения движения

$$-A\omega^2 \sin k\beta_j \cos \omega t = -A\omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \omega t + A \frac{\omega_0^2}{2} \sin(k-1)\beta_j \cos \omega t + A \frac{\omega_0^2}{2} \sin(k+1)\beta_j \cos \omega t;$$

после сокращения и применения формулы для суммы синусов получим $-\omega^2 \sin k\beta_j = -\omega_0^2 \sin k\beta_j + \omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \beta_j$.

С учетом условия (15) получаем спектр возможных частот собственных колебаний цепочки

$$\omega_j = \omega_0 \sqrt{1 - \cos \frac{j\pi}{n+1}}; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$



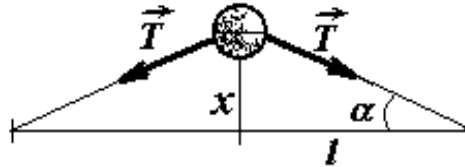
На рисунке спектр частот представлен для $n = 20$.

Так как в данном случае система обладает двадцатью степенями свободы, то и число собственных частот равно двадцати. Обратите внимание, низшие частоты практически эквидистантны (отличаются на одну и ту же величину), с ростом частот ее зависимость от порядкового номера становится заметно нелинейной – начинает сказываться зависимость скорости волны от частоты.

Еще раз обратим внимание на неоднозначность решения системы уравнений (3): сначала мы искали (и нашли!) решение в виде бегущих волн; а затем в виде стоячих. Правда, во втором случае мы наложили дополнительные (граничные) условия. В общем случае, для того, чтобы решение системы было однозначным необходимо задать еще и начальные условия: значения начальных положений и скоростей всех шариков цепочки. Тогда решение может быть представлено в виде суперпозиции найденных волн (построение решения в виде суммы найденных решений допустимо, так как сама система является линейной).

Заметим также, что бегущая волна, образованная сложением простых гармонических волн, не будет сохранять свою форму в процессе распространения, так как скорость волны зависит от ее частоты (имеет место дисперсия волн).

Часть 2. Поперечные волны.



2.1. Запишем уравнение движения шарика при его малом смещении x в направлении перпендикулярном цепочке. Так как смещение мы считаем малым, то и угол α мал, (можно положить $\alpha \approx \frac{x}{l}$);

кроме того, следует пренебречь изменением силы натяжения цепочки (изменение этой силы пропорционально x^2 , поэтому в линейном приближении малых колебаний должно быть опущено).

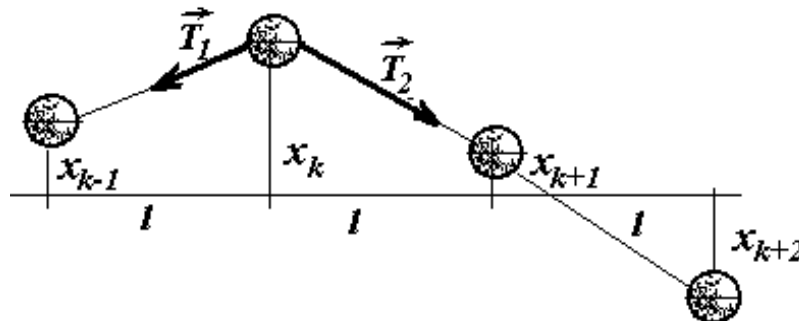
$$ma = -2T_0 \sin \alpha = -2T_0 \frac{x}{l}. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что частота малых колебаний шарика определяется формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{ml}}. \quad (18)$$

Если в положения равновесия пружинки не натянуты, то даже малые поперечные колебания будут нелинейны, так как возвращающая сила в этом случае будет пропорциональна x^3 .

2.2. Запишем уравнения движения одного из шариков бесконечной цепочки в том же приближении малых поперечных смещений.



$$ma_k = -T_0 \frac{x_k - x_{k-1}}{l} - T_0 \frac{x_k - x_{k+1}}{l}. \quad (19)$$

Приведем подобные члены, разделим на массу шарика m , используем обозначение ω_0 , соответствующее формуле (18) и получим уравнение

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}, \quad (20)$$

полностью совпадающее с уравнением (3). Поэтому и решения будут такими же. Не повторяя хода решения, запишем скорость распространения поперечных волн

$$c = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (21)$$

При малых частотах, эта формула переходит в

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}}. \quad (22)$$

2.3 Для деформации сдвига закон Гука имеет вид $\sigma = G\alpha$ (где σ – тангенциальное механическое напряжение, α – угол сдвига). В рассматриваемом одномерном случае аналогом механического напряжения является возвращающая сила $F = T_0\alpha$. Следовательно, аналогом модуля сдвига G является величина T_0 , аналогом плотности является отношение m/l . Подставляя эти величины в формулу для скорости распространения упругих волн в твердых телах, получим формулу

$$c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}},$$

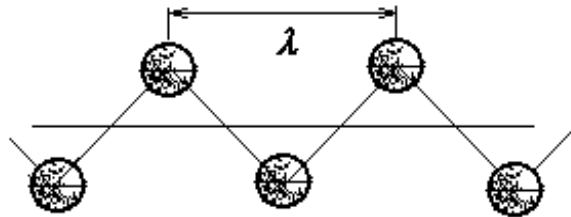
полностью совпадающую с формулой (22).

2.4 Длина волны рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Используя выражение (21), получим

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (23)$$



Минимальной длине волны соответствует максимальная частота $\omega = \omega_0\sqrt{2}$. В этом пределе $\lambda_{min} = 2l$.

Изобразим эту волну. Рисунок достаточно наглядно поясняет, почему существует минимально возможная длина волны, которая может распространяться по данной цепочке. Полностью аналогичная ситуация встретилась нам, при рассмотрении продольных волн, там также существует минимально возможная длина волны, соответствующая максимальной частоте колебаний.

2.5. При возрастании амплитуды колебаний возрастут силы упругости пружин, поэтому согласно формуле (21) скорость распространения волн увеличится.

Таким образом, в общем случае рассматриваемые волны являются нелинейными: скорость их распространения сложным образом зависит от амплитуды колебаний. Кроме того, для этих волн наблюдается явление дисперсии - зависимость скорости волн от их частоты. Исследование таких волн представляет собой весьма сложную математическую задачу, точное решение которой в настоящее время не известно.