Задача 10. «Барометрическая формула и прыгающий шарик»

При постоянной температуре T зависимость давления газа P от высоты h, определяется барометрической формулой

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

где μ – молярная масса газа, g – ускорение свободного падения, R – газовая постоянная. Молярную массу воздуха принять равной $\mu = 0{,}029 \frac{кг}{моль}$.

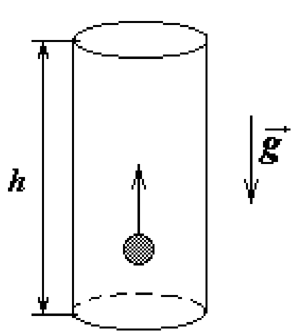
1. Оцените высоту, на которой давление воздуха уменьшается на 1 %, если температура воздуха постоянна и равна $t = 0°C$.

2. В очень высоком вертикальном цилиндрическом закрытом сверху сосуде с площадью основания S находится воздух, масса которого равна m. Найдите зависимость давления газа на дно сосуда от высоты сосуда и от температуры газа.

Рассмотрите два предельных случая а) $\mu g h >> RT$; б) $\mu g h << RT$. Дайте физическое объяснение полученным результатам.

Постройте семейства графиков зависимостей давления газа на дно сосуда от температуры (для нескольких значений высоты сосуда h) и от высоты сосуда (при различных значениях температуры T).

В качестве наглядной модели газа часто рассматривают множество маленьких жестких шариков, хаотически движущихся в некотором сосуде. В дальнейшем рассмотрим поведение упругого шарика движущегося вертикально в закрытом сосуде, находящемся в поле тяжести Земли. Столкновения шарика с дном и верхней крышкой сосуда будем считать абсолютно упругими. Будем изучать среднюю силу давления шарика на дно сосуда, причем будем полагать, что усреднение проводится по промежутку времени, значительно превышающему время между двумя последовательными ударами шарика.



3. Найдите зависимость силы давления шарика на дно сосуда от его высоты h и его скорости v_0 у дна сосуда.

Рассмотрите предельные случаи а) $mgh > \frac{mv_0^2}{2}$; б) $mgh < \frac{mv_0^2}{2}$. Постройте семейства зависимостей силы давления от высоты сосуда (при постоянной v_0) и от квадрата скорости v_0^2 (при постоянной высоте сосуда h).

4. Рассмотрите «адиабатный» процесс уменьшения высоты сосуда с прыгающим шариком. Пусть крышка сосуда медленно опускается, найдите зависимость силы давления шарика на дно от высоты сосуда. Определите «показатель» адиабаты для этой системы. Дайте объяснение полученному результату.

Решение.

1.Так как изменение давления является малой величиной, то отношение $\frac{\mu gh}{RT} << 1$, поэтому барометрическую формулу можно заменить упрощенным выражением

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \approx P_o(1 - \frac{\mu g}{RT} h), \qquad (1)$$

из которого следует

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_o - P_o}{P_o} = \frac{\mu g}{RT} h,$$

или

$$h = \frac{\Delta P}{P_0} \cdot \frac{RT}{\mu g} \approx 80 м. \qquad (2)$$

2. Мы знаем зависимость давления от высоты, но в формуле осталось неопределенным давление на дно сосуда P_0. Для того, что бы получить выражение для давления P_0, воспользуемся условием равновесия центра тяжести - разность сил давления на нижнюю P_0 и верхнюю P_1 стенки сосуда равна весу всего газа:

$$P_0 - P_1 = \frac{mg}{S}. \qquad (3)$$

Давление P_1 связано с P_0 барометрической формулой, комбинируя которое с последним выражением, найдем

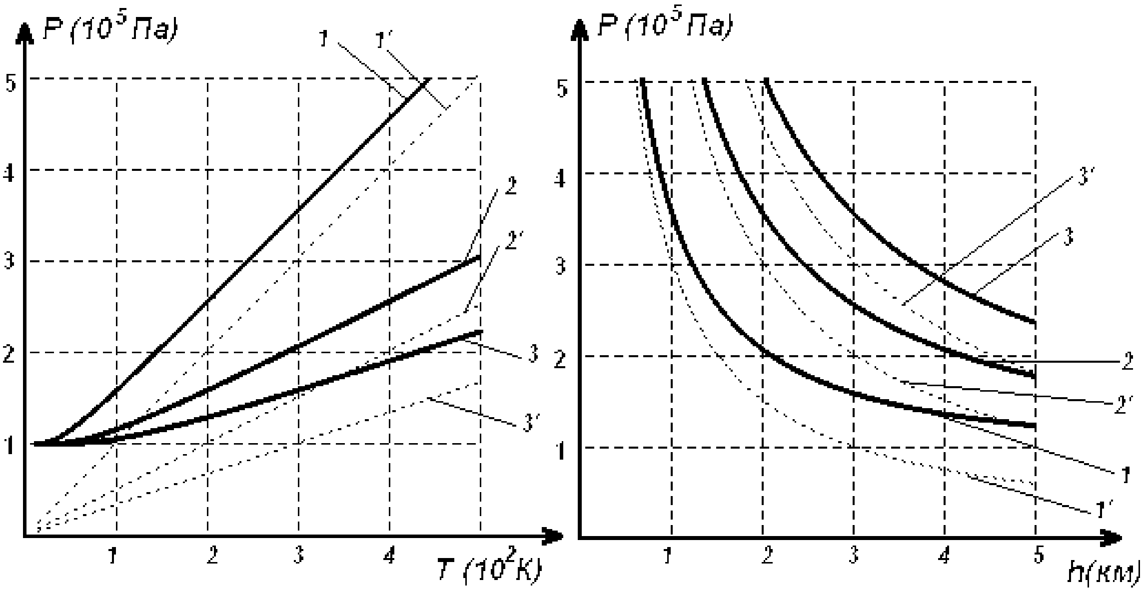
$$P_o = \frac{mg}{S(1 - e^{-\frac{\mu gh}{RT}})}. \qquad (4)$$

При очень больших высотах $\mu gh >> RT$ можно пренебречь экспонентой и тогда $P_0 = \frac{mg}{S}$. В этом случае давление газа на верхнюю грань сосуда становится пренебрежимо малым, поэтому сила давления на дно сосуда равна весу газа.

В другом крайнем случае $\mu gh << RT$ экспоненту можно заменить ее приближенным значением $e^{-x} \approx 1 - x$ и тогда $P_0 = \frac{mRT}{\mu Sh}$, или $P_0 V = \frac{m}{\mu} RT$. В этом приближении можно не учитывать силу тяжести, поэтому параметры газа подчиняются уравнению состояния Менделеева - Клапейрона.

Графики зависимости давления на дно сосуда от его высоты (при постоянной температуре) и от температуры (при постоянной высоте) показаны на рисунке.

Наиболее существенная особенность этих зависимостей наблюдается при



Зависимости давления на дно сосуда от температуры (1 - h=3 км, 2- h=6 км, 3- h=9 км); и от высоты сосуда (1- T=100K, 2- T=200K, 3- T=300K), рассчитанные по формуле (4). Пунктирные кривые - те же зависимости, рассчитанные по уравнению Менделеева-Клапейрона.

больших значениях отношения $\frac{\mu gh}{RT}$, потому что в этом случае влияние силы тяжести становится существенным.

3. Обозначим скорости шарика у дна сосуда v_0, а у верхней стенки – v_1. Будем искать среднюю силу давления шарика, усредняя по промежуткам времени значительно большими, чем время между двумя ударами.

Найдем время τ между двумя ударами шарика о дно сосуда. На основании закона сохранения энергии можем записать

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gh. \tag{5}$$

Если $v_0^2 < 2gh$, то шарик не долетит до верхней стенки сосуда, тогда время его полета

$$\tau = 2\frac{v_0}{g}, \tag{6}$$

при $v_0^2 > 2gh$ шарик ударится о верхнюю стенку и время его полета можно рассчитать по формуле

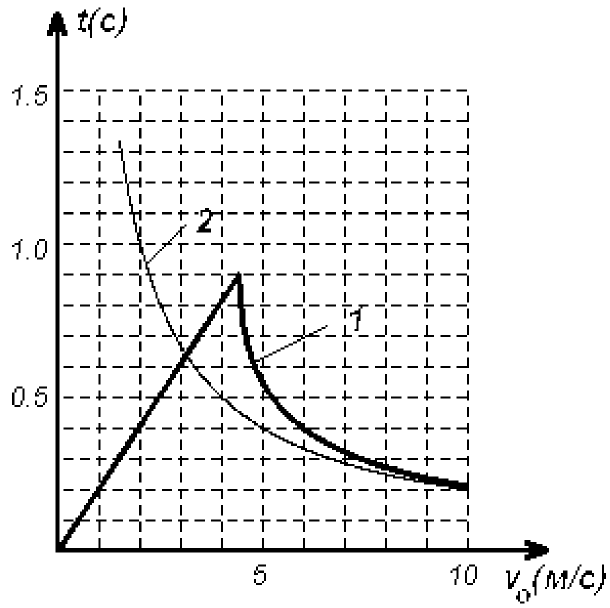
$$\tau = 2\frac{v_0 - v_1}{g} = 2\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \tag{7}$$

Если $v_0^2 >> 2gh$, то последнее выражение можно упростить, используя приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$:

$$v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh} = v_0(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}) \approx \frac{gh}{v_0}$$

тогда $\tau = 2\frac{h}{v_0}$, что совпадает с формулой (6). Подумайте почему?

На рисунке 2 изображен график зависимости времени полета шарика от его скорости у дна сосуда. Как видно, действительно зависимость меняется от прямо пропорциональной до обратно пропорциональной.



Зависимость времени полета от начальной скорости. 1 - по формуле (10);
2- по приближенной формуле (5).
(h=1.0 м)

Теперь запишем силу давления на дно сосуда по стандартной методике

$$F = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{2mv_0}{\tau}.$$

При $v_0^2 < 2gh$, $F = mg$; (8)

при

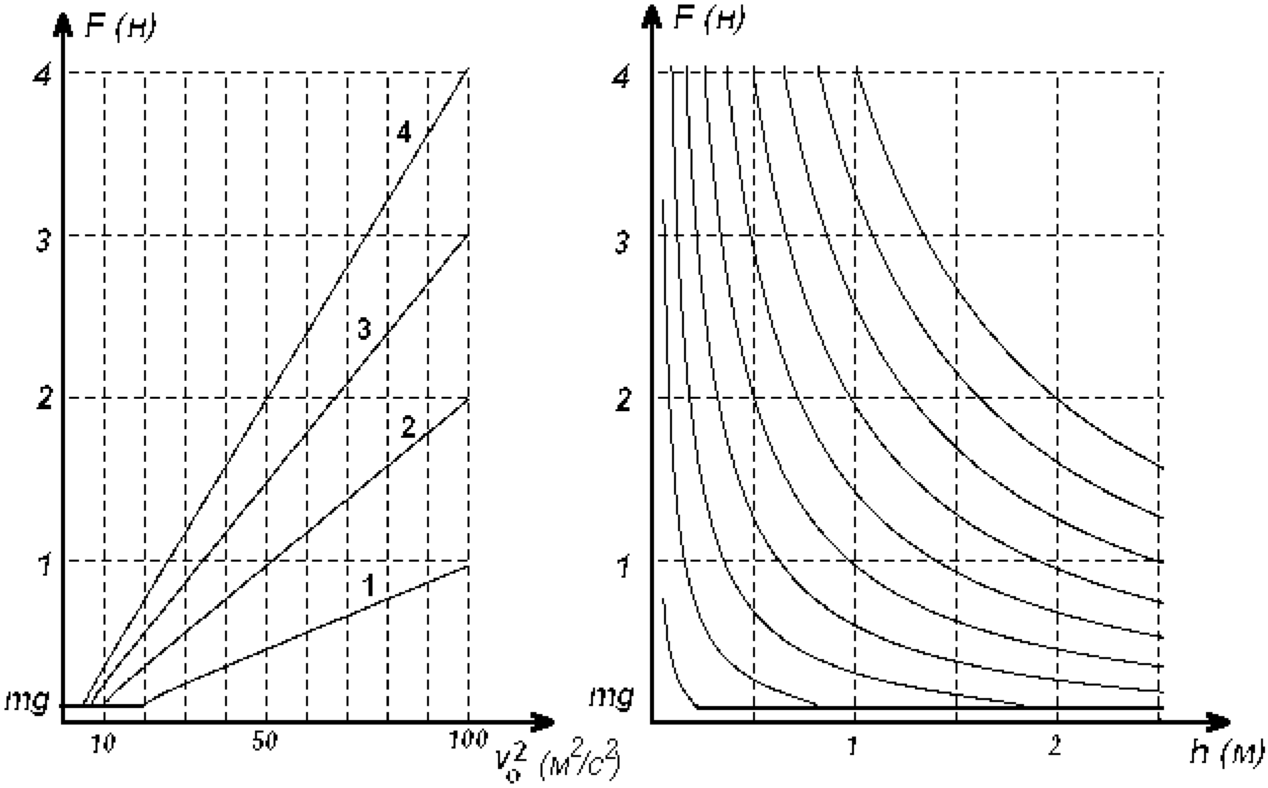
$$v_0^2 > 2gh, F = \frac{mg}{1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}. \quad (9)$$

Вот такое «уравнение состояния» получается для «газа» из одного шарика.

При $v_0^2 >> 2gh$ из (9) следует

$$F = \frac{mv_0^2}{h} \quad (10)$$

полный аналог уравнения состояния идеального газа.



Зависимости средней силы давления шарика шарика на дно сосуда от квадрата скорости (1- h=1.0м, 2- h=0.5м, 3- h=0.33м, 4 - h=0.2м); от высоты сосуда (при скоростях, 2, 4, 6...20 м/с). m=10г

На рисунке 3 представлены зависимости силы давления F от h (аналог зависимости давления от объема) и от v_0^2 (аналог температуры).

Итак, мы получили выражение для средней силы давления прыгающего шарика на дно сосуда. Она отличается от веса шарика. Ну а как же объяснить в этом случае утверждение – если центр тяжести системы не изменяет своего положения, то сумма внешних сил, действующих на систему равно нулю? Это положение справедливо и здесь! Не забудьте, шарик ударяется и о верхнюю крышку сосуда, действует на нее с некоторой силой, следовательно, и крышка действует с той же силой на шарик. Эту силу F_1 можно вычислить аналогично:

$$F_1 = \frac{2mv_1}{g}.$$

Найдем разность сил, действующих на шарик со стороны дна и со стороны крышки,

$$F_0 - F_1 = \frac{2m(v_0 - v_1)}{\tau},$$

но $\frac{2(v_0 - v_1)}{\tau} = g$ *(из простых кинематических рассуждений), поэтому, как и следовало ожидать,* $F_0 - F_1 = mg$.

4. Пусть крышка сосуда, медленно двигаясь со скоростью u $(u << v)$, опустилась на малую высоту Δh за время $\Delta t = \Delta h / u$. При абсолютно упругом встречном ударе шарика о движущуюся крышку его скорость возрастает на величину $\Delta v = 2u$. Полагая изменение скорости малым, можно приближенно считать, что время между ударами остается постоянным и равным $\tau = 2h / v$, тогда число ударов $n = \Delta t / \tau = v\Delta h / 2hu$ Таким образом, изменение скорости шарика связано с изменением высоты сосуда соотношением

$$\Delta v = n \cdot 2u = -\frac{v\Delta h}{h},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta h}{h}. \tag{11}$$

Знак минус указывает, что при уменьшении высоты скорость шарика возрастает. Из уравнения (21) непосредственно следует, что

$$vh = v_0 h_0 = const \tag{12}$$

Воспользуемся теперь формулой (10), которая здесь полностью применима, так как мы пренебрегаем действием силы тяжести, получим

$$F = \frac{mv^2}{h} = \frac{m(v_0 h_0)^2}{h^3}.$$

Последнее уравнение записывается в виде

$$Fh^3 = const,$$

которое и является уравнением адиабаты, правда, с несколько необычным показателем $\gamma = 3$. Однако, и газ у нас необычный! Идеальный газ, молекулы которого имеют одну степень свободы, согласно общей теории имеет молярную теплоемкость $C_V = R / 2$, тогда по уравнению Майера теплоемкость $C_P = C_V + R = 3 / 2 \cdot R$. Поэтому показатель адиабаты такого газа $\gamma = C_P / C_V = 3$, что полностью соответствует полученному результату.