§ 1.17. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

До сих пор мы рассматривали преломление света на плоской границе двух прозрачных сред. Однако важные практические применения имеют прозрачные тела, ограниченные сферическими поверхностями. Такие поверхности наиболее просты в изготовлении.

Как же происходит преломление световых лучей при переходе их из одной прозрачной среды в другую, если граница между средами имеет вид сферы? Для ответа на этот вопрос вместо закона преломления используем принцип Ферма, из которого он следует.

Пусть точечный источник света S расположен в первой среде на расстоянии d от выпуклой сферической поверхности — гра-

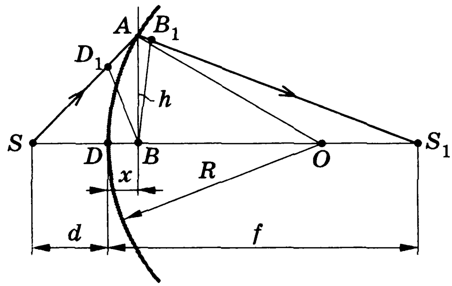

Рис. 1.85

ницы между средами (рис. 1.85). Радиус сферы обозначим через R. Точка O является центром сферы. Показатель преломления второй среды относительно первой обозначим буквой n. Это значит, что скорость распространения света в первой среде в n раз больше скорости распространения света во второй среде.

Найдем, на каком расстоянии f от сферы находится точка S_1, в которой соберется узкий пучок лучей, идущих от источника S вблизи нормали (перпендикуляра) SD к сферической границе раздела между прозрачными средами. (Такой пучок называют **параксиальным.**) Согласно принципу Ферма, это расстояние определяется условием, что время распространения света по прямолинейному пути SDS_1 равно (приближенно) времени распространения света по произвольно выбранной траектории SAS_1, если только луч SA принадлежит параксиальному пучку, вышедшему из источника S*.

Из точки A опустим на прямую SS_1 перпендикуляр AB. Его длину обозначим h. Так как мы рассматриваем параксиальный пучок лучей, то $h \ll d$, $h \ll f$ и $h \ll R$. Расстояние DB обозначим через x. На луче SA отложим отрезок $SD_1 = d + x$, а на лу-

---

*Лучи, вышедшие из точечного источника S, после преломления на сферической поверхности не будут собираться в одной точке. Это связано с тем, что только поверхность очень сложной формы может обеспечить совершенно одинаковое время распространения света от S к S_1 по всевозможным траекториям. Такую поверхность сделать очень трудно, и ее даже не пытаются изготовить. Хотя сферическая поверхность и не фокусирует всех лучей, но узкий пучок лучей, идущих вблизи перпендикуляра к поверхности, собирается практически в одной точке.

че AS_1 — отрезок $S_1B_1 = f - x$. Тогда, идя по траектории SAS_1, свет пройдет лишний путь $\Delta_1 = D_1A$ в первой среде и $\Delta_2 = AB_1$ во второй среде по сравнению с траекторией вдоль прямой SS_1. Но зато на прямолинейной траектории свет пройдет во второй среде путь, на $x - \Delta_2$ больший, чем в случае, когда он идет по траектории SAS_1. Запаздывание света во второй среде на пути $x - \Delta_2$ должно быть таким же, как запаздывание в первой среде на пути Δ_1 плюс запаздывание во второй среде на пути Δ_2. (При $x \leqslant \Delta_2$ такая компенсация, очевидно, невозможна.)

Найдем пути Δ_1, Δ_2 и x.

Из прямоугольного треугольника SAB имеем:

$$AB^2 = SA^2 - SB^2,$$

или

$$h^2 = (d + x + \Delta_1)^2 - (d + x)^2 =$$
$$= (d + x + \Delta_1 + d + x)(d + x + \Delta_1 - d - x) =$$
$$= (2d + 2x + \Delta_1)\Delta_1.$$

Так как $x \ll d$ и $\Delta_1 \ll d$, то $h^2 \approx 2d\Delta_1$ и $\Delta_1 \approx \frac{h^2}{2d}$.

Аналогично из прямоугольного треугольника ABS_1 найдем, что

$$\Delta_2 \approx \frac{h^2}{2f}.$$

Наконец, из прямоугольного треугольника ABO можно получить уравнение для определения x:

$$h^2 = R^2 - (R - x)^2.$$

Отсюда $x \approx \frac{h^2}{2R}$.

Если скорость света в первой среде равна v_1, а скорость света во второй среде равна v_2, то путь Δ_1свет в первой среде пройдет за время

$$\tau_1 = \frac{\Delta_1}{v_1} = \frac{h^2}{2dv_1},$$

а путь Δ_2 во второй среде свет пройдет за время

$$\tau_2 = \frac{\Delta_2}{v_2} = \frac{h_2}{2fv_2}.$$

На отрезке x запаздывание света, вызванное тем, что он идет во второй среде, а не в первой, равно разности времен прохождения светом пути x во второй и в первой средах:

$$\tau = \frac{x}{v_2} - \frac{x}{v_1} = \frac{x}{v_1}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right) = \frac{x}{v_1}(n - 1) = \frac{h^2(n - 1)}{2Rv_1}.$$

Для фокусировки лучей время прохождения света от точки S до точки S_1 по всем траекториям должно быть одинаково. Следовательно, $\tau_1 + \tau_2 = \tau$.

Подставляя сюда выражения для τ_1, τ_2 и τ и сокращая затем на общий множитель $\frac{h^2}{2}$, получим уравнение

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = \frac{n - 1}{R}. \tag{1.17.1}$$

В полученное уравнение не входит величина h; существенно лишь, чтобы h было мало. Это значит, что все приосевые лучи пересекаются после преломления в одной точке S_1, которая является изображением источника S.

Пользуясь уравнением (1.17.1), можно определить положение изображения S_1 (расстояние f), если известны относительный показатель преломления n и радиус сферы R.

В частном случае, когда $d \to \infty$ (пучок состоит из параллельных лучей), положение точки, в которой сходятся лучи (фокус), определяется по формуле

$$F = \frac{Rn}{n - 1}. \tag{1.17.2}$$

Рассмотрим случай, когда $d < \frac{R}{n - 1}$. Из формулы (1.17.1) следует, что при этом $f < 0$. Это значит, что точка S_1 должна быть не справа от сферической поверхности, а слева от нее. Но лучи, падающие на сферическую поверхность, очевидно, не могут пересекаться перед этой поверхностью. Пересекаться перед поверхностью могут лишь их продолжения (рис. 1.86), т. е. изображение S' является мнимым. Мнимому изображению источника соответствует отрицательное значение величины f в формуле (1.17.1).

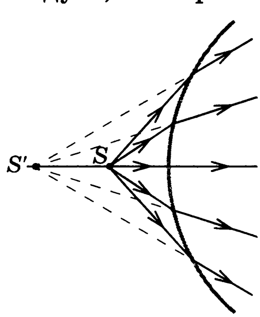

Рис. 1.86